Exponenciális egyenletek

- hatványozás azonosságai:
  - $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
  - $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
  - $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- „nevezetes" hatványok:
  - $a^0 = 1$
  - $a^1 = a$
  - $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (pl. $\frac{1}{9} = 3^{-2}$)
  - $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ (pl. $3 = \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$)
  - $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (pl. $2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$)
- típusok
  - egyszerű
    - csak egy *tag* kitevő(i)ben van ismeretlen (pl. 3^x vagy $3^x \cdot 3^{x+1}$)
    - az ismeretlent tartalmazó kifejezésen *kívül* csak egy szám van
    - egy (együttható „nélküli") exponenciális kifejezés *mindig* pozitív (azaz a $2^x = -4$ egyenletnek *nincs* megoldása)
    - pl. $3^x \cdot 3^{x+1} = \frac{1}{27}$
    - megoldása
      1. a számot átírjuk hatvány-alakba
         $3^x \cdot 3^{x+1} = 3^{-3}$
      2. $a^{\cdots} = a^{\cdots}$ alakra rendezzük (hatványozás azonosságainak segítségével)
         $3^{2x+1} = 3^{-3}$
      3. „exp. fgv. szig. mon. miatt"
      4. két kitevő megegyezik
         $2x + 1 = -3$
      5. a kapott egyenletet megoldjuk
    - elképzelhető, hogy nem lehet azonos alapra rendezni, pl.: $2^x = 3$ (a hármat nem tudjuk egyszerű 2-hatványként felírni), ekkor $x = \log_2 3 \approx 1,5850$.
  - „lebontogatós"
    - több tag kitevőjében van ismeretlen
    - mindegyik hatványalap azonos
    - a kitevőben levő ismeretlenek együtthatója azonos
    - pl. $3^{x-1} + 4 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 66$
    - megoldása
      1. a legkisebb kitevőre átírunk mindent (lehet más kitevőre is, csak akkor negatív hatványkitevők ill. törtszámok jelenhetnek meg): $3^{x-1} + 4 \cdot 3^{x-1} \cdot 3^1 + 3^{x-1} \cdot 3^2 = 66$
      2. kiszámoljuk a hatványokat, szorzásokat:
         $3^{x-1} + 12 \cdot 3^{x-1} + 9 \cdot 3^{x-1} = 66$
      3. összevonunk (figyelve, hogy $3^{x-1} = 1 \cdot 3^{x-1}$):
         $22 \cdot 3^{x-1} = 66$
      4. osztás után legtöbbször a másik oldalon az alap egy hatványa fog szerepelni:
         $3^{x-1} = 3$
      5. tovább lásd „egyszerű" típus
  - másodfokúra visszavezethető
    - a hatványalapok közül az egyik négyzete a másikkal egyezik meg, vagy
    - a kitevőkben levő ismeretlen együtthatóira teljesül, hogy az egyik a másik kétszerese (pl. $3x$ ill. $6x$)
    - megoldása
      1. *lebontogatással* elérjük, hogy mindegyik kitevő $a \cdot x$ alakú legyen (azaz pl. 5^{2x+3}-t $5^{2x} \cdot 5^3 = 125 \cdot 5^{2x}$-re alakítjuk)
      2. új ismeretlent vezetünk be (pl. $5^x = y$, $25^x = 5^{2x} = y^2$)
      3. megoldjuk az y-ban másodfokú egyenletet
      4. visszaírjuk (innen ld. „egyszerű" típus)

Exponenciális egyenletek

- hatványozás azonosságai:
  - $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
  - $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
  - $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- „nevezetes" hatványok:
  - $a^0 = 1$
  - $a^1 = a$
  - $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (pl. $\frac{1}{9} = 3^{-2}$)
  - $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ (pl. $3 = \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$)
  - $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (pl. $2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$)
- típusok
  - egyszerű
    - csak egy *tag* kitevő(i)ben van ismeretlen (pl. 3^x vagy $3^x \cdot 3^{x+1}$)
    - az ismeretlent tartalmazó kifejezésen *kívül* csak egy szám van
    - egy (együttható „nélküli") exponenciális kifejezés *mindig* pozitív (azaz a $2^x = -4$ egyenletnek *nincs* megoldása)
    - pl. $3^x \cdot 3^{x+1} = \frac{1}{27}$
    - megoldása
      1. a számot átírjuk hatvány-alakba
         $3^x \cdot 3^{x+1} = 3^{-3}$
      2. $a^{\cdots} = a^{\cdots}$ alakra rendezzük (hatványozás azonosságainak segítségével)
         $3^{2x+1} = 3^{-3}$
      3. „exp. fgv. szig. mon. miatt"
      4. két kitevő megegyezik
         $2x + 1 = -3$
      5. a kapott egyenletet megoldjuk
    - elképzelhető, hogy nem lehet azonos alapra rendezni, pl.: $2^x = 3$ (a hármat nem tudjuk egyszerű 2-hatványként felírni), ekkor $x = \log_2 3 \approx 1,5850$.
  - „lebontogatós"
    - több tag kitevőjében van ismeretlen
    - mindegyik hatványalap azonos
    - a kitevőben levő ismeretlenek együtthatója azonos
    - pl. $3^{x-1} + 4 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 66$
    - megoldása
      1. a legkisebb kitevőre átírunk mindent (lehet más kitevőre is, csak akkor negatív hatványkitevők ill. törtszámok jelenhetnek meg): $3^{x-1} + 4 \cdot 3^{x-1} \cdot 3^1 + 3^{x-1} \cdot 3^2 = 66$
      2. kiszámoljuk a hatványokat, szorzásokat:
         $3^{x-1} + 12 \cdot 3^{x-1} + 9 \cdot 3^{x-1} = 66$
      3. összevonunk (figyelve, hogy $3^{x-1} = 1 \cdot 3^{x-1}$):
         $22 \cdot 3^{x-1} = 66$
      4. osztás után legtöbbször a másik oldalon az alap egy hatványa fog szerepelni:
         $3^{x-1} = 3$
      5. tovább lásd „egyszerű" típus
  - másodfokúra visszavezethető
    - a hatványalapok közül az egyik négyzete a másikkal egyezik meg, vagy
    - a kitevőkben levő ismeretlen együtthatóira teljesül, hogy az egyik a másik kétszerese (pl. $3x$ ill. $6x$)
    - megoldása
      1. *lebontogatással* elérjük, hogy mindegyik kitevő $a \cdot x$ alakú legyen (azaz pl. 5^{2x+3}-t $5^{2x} \cdot 5^3 = 125 \cdot 5^{2x}$-re alakítjuk)
      2. új ismeretlent vezetünk be (pl. $5^x = y$, $25^x = 5^{2x} = y^2$)
      3. megoldjuk az y-ban másodfokú egyenletet
      4. visszaírjuk (innen ld. „egyszerű" típus)