

Exponenciális, logaritmosos egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

1. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a)

$$\begin{cases} 3^x + 2 \cdot 2^y = 11 \\ 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{(7; 1)}$$

b)

$$\begin{cases} 2^x + 5 \cdot 7^y = 7 \\ 2^x - 3 \cdot 7^y = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{(0; 1)}$$

c)

$$\begin{cases} 3^{x+1} - 2^y = 5 \\ 5 \cdot 3^x + 2^{y+1} = 23 \end{cases}$$

$$\boxed{(7; 1)}$$

d)

$$\begin{cases} \lg x + 5 \cdot \lg y = 7 \\ 3 \cdot \lg x - 2 \cdot \lg y = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{(01; 001)}$$

e)

$$\begin{cases} \lg x - 2 \cdot \lg y = 3 \\ 5 \cdot \lg x + \lg y = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{01}{1}; 01\right)}$$

f)

$$\begin{cases} \log_3(2x + y) + \log_3(2x - y) = 1 \\ \log_2(2x + y) + \log_2(2x - y) = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{(-; -)}$$

g)

$$\begin{cases} 2^x - 4 \cdot 8^y = 0 \\ \log_5 x + \log_5 y = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{(1; 9)}$$

h)

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 7 \\ \lg x + \lg y = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{(1; 0; 901)}$$

i)

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 2 \\ x - 10y = 900 \end{cases}$$

$$\boxed{(01; 0001)}$$

2. Oldd meg az alábbi, exponenciális egyenlőtlenségeket!

a) $3^x > 27$

$$\boxed{9 < x}$$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{2}$

$$\boxed{1 \geq x}$$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{25}{9}$

$$\boxed{7- < x}$$

d) $2^x \geq 128$

$$\boxed{7 \leq x}$$

e) $5^x \leq 25$

$$\boxed{5 \geq x}$$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{4}{9}$

$$\boxed{5 > x}$$

g) $6^x < 36$

$$\boxed{6 > x}$$

h) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{16}$

$$\boxed{6 < x}$$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2} > \frac{1}{9}$

$$\boxed{0 > x}$$

j) $5^{3x-4} < \left(\frac{1}{25}\right)$

$$\boxed{\frac{9}{5} > x}$$

k) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x+12} \leq \frac{1}{8}$

$$\boxed{\frac{9}{2} - \leq x}$$

l) $\left(\frac{3}{7}\right)^{4-3x} \geq \frac{49}{9}$

$$\boxed{7 \leq x}$$

3. Oldd meg az alábbi, logaritmosos egyenlőtlenségeket!

a) $\log_2 x < 1$

$$\boxed{7 > x > 0}$$

b) $\log_3 x > \frac{1}{2}$

$$\boxed{9 \wedge < x}$$

c) $\log_5 x \leq -1$

$$\boxed{\frac{5}{1} \leq x > 0}$$

d) $\log_4(x-2) < 0$

$$\boxed{9 > x > 7}$$

e) $\log_6(x+3) > 0$

$$\boxed{7- < x}$$

f) $\log_3(2x-4) \geq 0$

$$\boxed{\frac{7}{3} \geq x}$$

g) $\log_{\frac{1}{2}}(5-x) > 1$

$$\boxed{9 > x > 9 \wedge 7}$$

h) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-2) < -2$

$$\boxed{\frac{7}{11} < x}$$

i) $\log_{0,2}(6x-4) \leq -1$

$$\boxed{\frac{7}{3} \leq x}$$

4. Egy biológiai kísérlet során baktériumokat szaporítanak. Azt tapasztalják, hogy megfelelő körülmények között a baktériumállomány 6 óra alatt megduplázódik. A kísérlet kezdetén 1000 baktérium volt.

a) Mennyi baktérium volt a kísérlet kezdete után 2 nappal?

000 957

b) A kísérlet addig tart, amíg a baktériumok száma el nem éri a 10^9 darabot. Mennyi ideig folyik a kísérlet?

kb. 5 nap

5. Egy tóba honosítás céljából 500 darab csíkos sügért telepítettek 2005. márciusában. A halbiológusok figyelemmel kísérték az állomány gyarapodását, és azt találták, hogy a halak száma a

$$h(t) = 500 \cdot \log_3(2t + 3)$$

függvénnyel írható le, ahol t a telepítéstől eltelt évek számát jelenti.

a) Mennyi csíkos sügér élt a tóban 2006 márciusában?

737

b) Hány százalékkal nőtt a halak száma 2007 és 2009 márciusa között?

23%-kal

c) Várhatóan mikor éri el a hal populáció az 1500 darabot?

12 év múlva

6. Egy webáruház üzemeltetői a létrehozás utáni első hónapban úgy tapasztalták, hogy a napi vásárlások száma az eltelt idővel exponenciálisan növekedett, nagyjából az $N(x) = 10 \cdot 1,08^x$ függvény szerint, ahol N az adott napi vásárlások száma, x pedig a nyitás óta eltelt napok száma. Számítsd ki, hogy a nyitás utáni hányadik napon lépte át először a vásárlások száma a napi 100-at!

30. napon

7. Egy rakéta üzemanyagának elégetésével gyorsul, végsebességét pedig a $v(k) = 2,303 \cdot u \cdot \lg k$ (levezethető) összefüggés adja meg, ahol u az elégetett üzemanyag kiáramlásának sebessége, $k > 1$ pedig a kezdeti tömeg (üzemanyaggal) és a megmaradt tömeg (üzemanyag nélkül) hányadosa.

a) A II. világháborús V-2 rakétából 2000 m/s sebességgel áramlott ki a gáz, és a rakéta megmaradt tömege a kezdeti tömegének 31%-a volt. Mekkora volt ennek a rakétának az elméleti végsebessége?

2343 m/s

b) Legfeljebb hány százaléka lehet a végső tömeg a kezdeti tömegnek, ha a rakétát 2,3 km/s sebességgel hagyja el a kiáramló gáz, és legalább 2,8 km/s elméleti végsebességet akarnak elérni?

29,6%