# *XIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny*

*Nagydobrony, 2004. márc. 15-20.*

## 10. osztály

**1. feladat:** Két gépkocsi halad az autópályán egy irányban. A köztük lévő távolság jelenleg 2 km, és minden $n$-edik percben $\frac{1}{n^2}$ km-rel csökken. Utoléri-e a második jármű az előtte haladót?

*Gecse Frigyes (Ungvár)*

**1. feladat I. megoldása:** A két jármű közötti távolság $n$ perc alatt $\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$-tel csökken, ezért ez a távolság

$$D_n = 2-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) = 1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) \text{ km.}$$

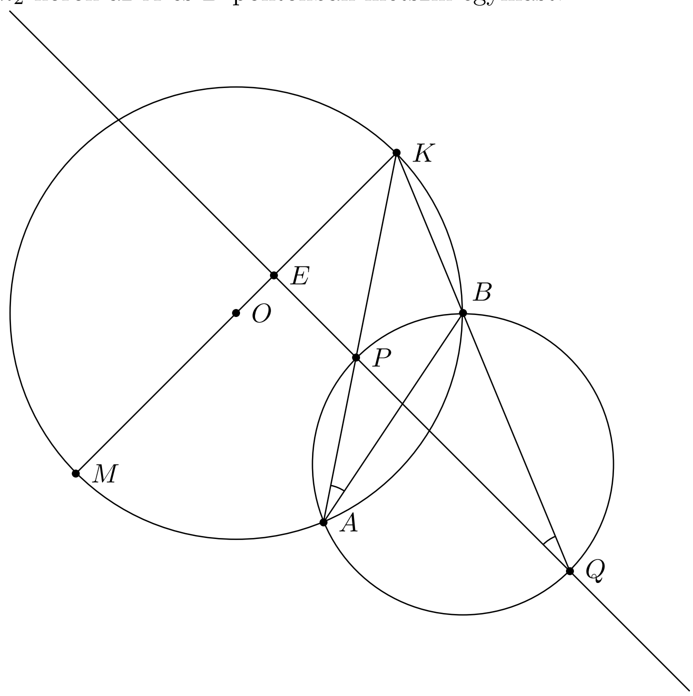
De

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} =$$
$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{n}.$$

Ezért $D_n > 1-\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} > 0$ $n$ minden természetes értékével. Tehát a másik jármű **soha nem éri utol az előtte haladót**.

---

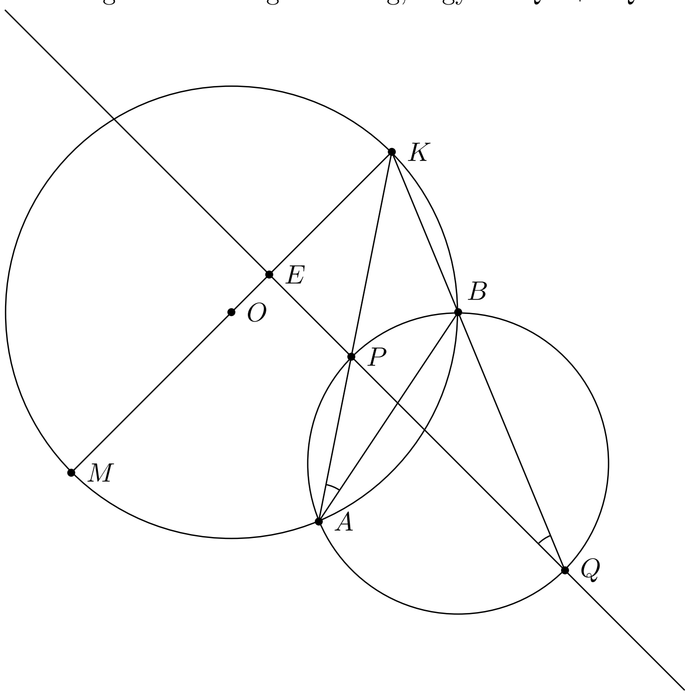
**2. feladat:** A $k_1$ és $k_2$ körök az $A$ és $B$ pontokban metszik egymást.




A $k_1$ kör tetszőleges ($A$-tól és $B$-től különböző) $K$ pontját összekötjük az $A$ és $B$ pontokkal. A $KA$ és $KB$ egyenesek a $k_2$ kört másodszor a $P$ és $Q$ pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy a $PQ$ húr merőleges a $k_1$ kör $KM$ átmérőjére.

*Dr. Pintér Ferenc (Nagykanizsa)*

**2. feladat I. megoldása:** Legyen $E$ a $PQ$ egyenes és $MK$ egyenes metszéspontja. Akkor elegendő bizonyítani, hogy $QEK$ háromszögben az $E$ szög derékszög, vagy $EKQ\angle + EQK\angle = 90°$.




Felírhatjuk: $EKQ\angle + EQK\angle = MKA\angle + AKB\angle + BAK\angle$ Ugyanis $EQK$ és $BAK$ szögek a $k_2$ kör $PB$ ívére támaszkodó kerületi szögek, ezért egyenlők. De a felírt három szög összege a $k_1$ körön sorban az $MA$, $AB$ és $BK$ ívekre támaszkodnak, melyek összesen egy félkört tesznek ki, tehát fokmértékük összege 180°. Ezért a három szög összege ennek a fele, tehát 90°.

---

**3. feladat:** Melyek azok a természetes $n$ számok, melyekre $n^2 - 440$ teljes négyzet!

*Dr. Kántor Sándorné (Debrecen)*

**3. feladat I. megoldása:** Legyen $n^2 - 440 = m^2$, $m$ egész. Ebből $n^2 - m^2 = 440 \iff (n+m)(n-m) = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$. Az $n+m$ valamint $n-m$ számokra fennálló lehetőségek kiválasztásakor most azt vesszük figyelembe, hogy $n+m > n-m$ továbbá mindkettő páros, mert szorzatuk páros. Ezért a következő lehetőségeket kapjuk:

$$\begin{cases} n+m = 4\cdot 5\cdot 11, \\ n-m = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} n+m = 4\cdot 11, \\ n-m = 2\cdot 5; \end{cases} \quad \begin{cases} n+m = 2\cdot 11, \\ n-m = 4\cdot 5; \end{cases} \quad \begin{cases} n+m = 2\cdot 5\cdot 11, \\ n-m = 4. \end{cases}$$

Megoldva a négy egyenletrendszert, négy $n$-értéket kapunk: **111**, **27**, **21** és **57**. Mindegyikre teljesül a követelmény: $111^2 - 440 = 11881 = 109^2$; $27^2 - 440 = 289 = 17^2$; $21^2 - 440 = 1 = 1^2$; $57^2 - 440 = 2809 = 53^2$.

---

**4. feladat:** Létezik-e olyan $x$ és $y$ természetes szám, melyekre $7^x - 5^y = 2004$?

*Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)*

**4. feladat I. megoldása:** Felhasználjuk a számelmélet ismert állításait: bármely természetes $n$-re $a^n - b^n$ osztható $(a-b)$-vel, páratlan $n$-re pedig osztható $(a+b)$-vel, ahol $a$ és $b$ egész számok. Felírjuk az egyenletet másképpen: $(7^x + 1) - (5^y - 1) = 2006$. Itt páratlan $x$-re és bármilyen $y$-ra a baloldal mindkét tagja osztható 4-gyel, a jobb oldal 2006 viszont nem. Tehát $x$ nem lehet páratlan. Ha az egyenletet $(7^x - 1) - (5^y + 1) = 2002$ alakban írjuk fel, akkor a bal oldal mindkét tagja osztható 6-tal, a jobb oldal viszont 2002 nem osztható 6-tal. Tehát $y$ sem lehet páratlan. Ha $x$ és $y$ párosak, akkor $x = 2k$, $y = 2m$, és az egyenletet ilyen alakban írhatjuk: $\left(49^k - 1\right) - (25^m - 1) = 2004$. A bal oldalon

$49^k - 1$ osztható 48-cal, $25^m - 1$ pedig 24-gyel, vagyis a bal oldal osztható 8-cal a jobb oldal 2004 pedig nem. Tehát, a **keresett $x$ és $y$ nem létezik**.

---

**5. feladat:** Adott a térben hat tetszőleges pont. Ezeket összekötjük az összes lehetséges módon. Igazolja, hogy azon három szakasz felezőpontjai által alkotott háromszögek súlypontjai, amely szakaszoknak páronként nincs egy közös végpontja, egybeesnek.

*Bencze Mihály (Brassó)*

**5. feladat I. megoldása:** Legyen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ az adott hat pont, $AB$, $CD$ és $EF$ a három kiválasztott, a feltételnek megfelelő szakasz. $M$, $K$ és $P$ sorban e szakaszok felezőpontjai, az $MKP$ háromszög súlypontja pedig $S$. Akkor a tér tetszőleges $O$ pontjára a háromszög súlypontjának valamint a szakasz felezőpontjának ismert vektorképleteit alkalmazva felírhatjuk:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OP}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right).\end{aligned}$$

Könnyű belátni, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az $AB$, $CD$ és $EF$ szakaszok helyett bármely másik három alkalmas szakaszt választjuk. Ebből következik, hogy az $S$ pont minden esetben ugyanaz.

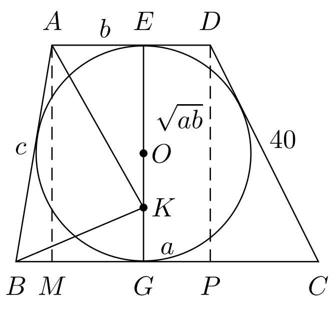
---

**6. feladat:** Egy trapézba, melynek egyik szára 40 cm, területe 1280 cm$^2$, kör írható. A trapéz magassága az alapok mértani közepe. Bizonyítsa be, hogy a trapéz köré is írható kör, és számítsa ki a beírt és köré írt körök középpontjai közötti távolságot!

*Gecse Frigyes (Ungvár)*

**6. feladat I. megoldása:** Az ábra jelöléseivel: $PC = \sqrt{40^2 - ab}$; $BM = a - b - \sqrt{40^2 - ab}$. Figyelembe vesszük, hogy a trapézba kör írható, vagyis a szemben fekvő oldalak összege egyenlő, az $AMB$ derékszögű háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, felírjuk a trapéz területét, kapjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} a+b = 40 + c; \\ \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(a - b - \sqrt{40^2 - ab}\right)^2 = c^2; \\ (a+b)\sqrt{ab} = 2560. \end{cases}$$

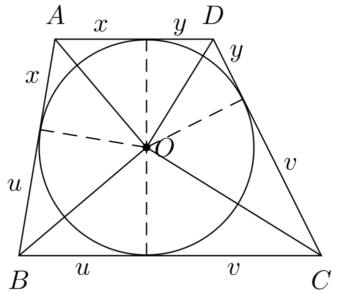



Az első egyenletből $c = a + b - 40$, ebből $c^2 = a^2 + b^2 + 1600 + 2ab - 80a - 80b$. Ezt az eredményt a második egyenletbe helyettesítve, és elvégezve az átalakításokat, a $\sqrt{1600 - ab}\,(a-b) = 40\,(a+b) - 2ab$ egyenlethez jutunk, amit négyzetre emelve csak $(a+b)$ és $ab$ alakú kifejezéseket tartalmazó egyenlet adódik:

$$(1600 - ab)\left((a+b)^2 - 4ab\right) = 1600\,(a+b)^2 - 160ab\,(a+b) + 4a^2b^2.$$

Ebből egyszerűsítésekkel az $(a+b)^2 - 160(a+b) + 6400 = 0$ egyenletet kapjuk, ahonnan $a+b=80$. Ezután a rendszer harmadik egyenletéből $\sqrt{ab} = 32 \iff ab = 1024$. Feltételezve, hogy $a > b$, az alapokra $a = 64$cm és $b = 16$cm értékeket kapjuk. A $c$ szárra $c = 80 - 40 = 40$(cm) értéket kapjuk, ami annyit jelent, hogy a trapéz egyenlő szárú. Tehát, köré is írható kör. Mind a beírt, mind a köré írt kör középpontja a szimmetriatengelyen fekszik. Legyen $GK = y$, akkor $KE = 32 - y$. Az $AEK$ és $BGK$ derékszögű háromszögekből a köré írt kör sugarának négyzetét kifejezve az $y^2 + 32^2 = (32-y)^2 + 8^2$ egyenlet adódik, melyet megoldva $y = 1$ értéket kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a $K$ pont valóban a trapéz belsejében van. Végül **OK = 16-1 = 15 (cm)**.

**6. feladat II. megoldása:** Először igazoljuk, hogy a trapéz egyenlő szárú. Ehhez elegendő bizonyítani, hogy a beírt kör az alapokat a felezőpontokban érinti. A trapéz alapon fekvő szögeinek öszege $180°$, a beírt kör középpontja pedig a szögfelezők metszéspontja, ezért $AOB\angle = COD\angle = 90°$. Az $AOB$ és $COD$ derékszögű háromszögekből $r^2 = xu = yv$, ahonnan $\frac{x}{y} = \frac{v}{u}$ (*).




A feltétel szerint a magasság az alapok mértani közepe: $(2r)^2 = (x+y)(u+v)$, vagyis $xu + xv + yu + yv = 4xu$. De $xu = yv$ miatt $xv - 2xu + yu = 0$, melyet $(yu)$-val osztva (*) figyelembevételével az $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0 \iff \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 = 0$ egyenlethez jutunk. Ebből $\frac{x}{y} = 1$, azaz $x = y$ és akkor $u = v$. A további számításokat az olvasóra bízzuk.

---

**7. feladat:** Az $\frac{a}{b}$ közönséges tört tizedes tört alakja olyan végtelen szakaszos tizedes tört, amelynek szakasza $(b-1)$ számjegyből áll. Az $a$ és $b$ számok pozitív egészek. Fejezzük ki az egy szakaszban lévő jegyek összegét $b$-vel!

*Bogdán Zoltán (Cegléd)*

**7. feladat I. megoldása:** Végezzük el néhány tört tizedessé alakítását! Pl. $\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots = 0,(142857)$, $\frac{1}{6} = 0,1666\ldots = 0,1\,(6)$, $\frac{1}{13} = 0,076923076923\ldots = 0,(076923)$. Azt találjuk, hogy csak az első példára teljesül a feladat feltétele: a nevező 7, és $(7-1)$ számjegyből áll a szakasz. Ebben az esetben az osztás folyamatos elvégzésekor minden lehetséges maradékot megkapunk (természetesen a 0 kivételével). Ezek a maradékok: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (más sorrendben). Az osztáskor mindig egy 0-t írunk jobbról a maradékhoz, vagyis a tizedes tört számjegyei úgy állnak elő, hogy 10-et, 20-at, 30-at, stb. osztjuk 7-tel, miközben a szakasz számjegyei a nem teljes hányadosok lesznek, úgy is mondhatjuk, a $\left[\frac{10}{7}\right]; \left[\frac{20}{7}\right]$ stb. számjegyek. Általános alakban ha $b$-vel osztunk, a maradékok az $1, 2, 3, \ldots, (b-1)$ számok lesznek, a szakasz számjegyei pedig $\left[\frac{10}{b}\right]; \left[\frac{20}{b}\right]; \ldots; \left[\frac{10(b-1)}{b}\right]$ számok. De $\frac{10k}{b} = \left[\frac{10k}{b}\right] + \frac{r_k}{b}$ $\quad (k \le b-1)$, ahol az $r_k$ szám a $10k$ szám $b$-vel való osztásának maradéka.

Így $\frac{10}{b} + \frac{20}{b} + \ldots + \frac{10(b-1)}{b} = \left[\frac{10}{b}\right] + \frac{r_1}{b} + \left[\frac{20}{b}\right] + \frac{r_2}{b} + \ldots + \left[\frac{10(b-1)}{b}\right] + \frac{r_{b-1}}{b}$.

De

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{b-1} = 1 + 2 + \ldots + (b-1) = \frac{(1+b-1)(b-1)}{2} = \frac{b(b-1)}{2}$$

$$\frac{10}{b} + \frac{20}{b} + \ldots + \frac{10(b-1)}{b} = \frac{10(1+2+\ldots+(b-1))}{b} = \frac{10b(b-1)}{2b} = 5(b-1)$$

$$\frac{r_1}{b} + \frac{r_2}{b} + \ldots + \frac{r_{b-1}}{b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{b\,(b-1)}{2} = 0,5\,(b-1)\,.$$

Végül $\left[\frac{10}{b}\right]+\left[\frac{20}{b}\right]+\ldots+\left[\frac{10(b-1)}{b}\right] = 5\,(b-1)-0,5\,(b-1) = 4,5\,(b-1)$. A megoldást nem befolyásolja a szakasz és a tizedes vessző között esetleg előforduló számcsoport.