9. évf. 1. feladat.

Jelölje v_1 = 130 km/h = 36.1 m/s és v_2 = 60 km/h = 16.7 m/s a két autó kezdeti sebességét, gyorsulásukat pedig a_1 = –0.3 m/s^2 illetve a_2 = 1 m/s^2.
Az egyenes vonalú egyenletes gyorsulást (ill. lassulást) folytatva t idő alatt a következő távolságot teszik meg:

$$s_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2$$ (1 pont)

$$s_2 = v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2$$ (1 pont)

Kezdeti távolságuk s_0 = 100 m, az 1-es autó ekkora hátrányból indul, így:
$s_1 = s_2 + s_0$, amit behelyettesítve:

$v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 = v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 + s_0$, majd átrendezve $\frac{1}{2}\left(a_1 - a_2\right) t^2 + \left(v_1 - v_2\right) t - s_0 = 0$ (4 pont)

alakú másodfokú egyenletet kapunk, melynek megoldásai:

$$t_I = \frac{v_2 - v_1 + \sqrt{\left(v_1 - v_2\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(a_1 - a_2\right) \cdot s_0}}{2 \cdot \frac{1}{2}\left(a_1 - a_2\right)} = 6.6 \text{ s}$$

(3 pont)

$$t_{II} = \frac{v_2 - v_1 - \sqrt{\left(v_1 - v_2\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(a_1 - a_2\right) \cdot s_0}}{2 \cdot \frac{1}{2}\left(a_1 - a_2\right)} = 23.3 \text{ s}$$

(3 pont)

A két előzés között $t_{II} - t_I$ = 16.7 másodperc telik el. (2 pont)
A két előzés között megtett út:

$$\Delta s = v_1 t_{II} + \frac{1}{2} a_1 t_{II}^2 - v_1 t_I + \frac{1}{2} a_1 t_I^2 = 760.4 \text{ m} - 231.7 \text{ m} = 528.7 \text{ m}$$

(3 pont)

A sebességek a második előzéskor:

$v_{1,II} = v_1 + a_1 t_{II} = 104.8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ és $v_{2,II} = v_2 + a_2 t_{II} = 143.9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (3 pont)

9. évf. 2. feladat

A tömegek rendre: 1000 g, 1500 g, 2250 g, 3375 g.
Könnyen felfedezhető, hogy mértani sor szerint növekszik a tömeg elemenként q_1= 1.5-szörösére.
m_1 = 1000 g esetén a sor a következő formába írható: $m_n = m_1 \cdot q_1^{n-1}$ (4 pont)
A távolságok az első súlytól rendre: 10 cm, 30 cm, 70 cm. Szintén mértani sort fedezhetünk fel, ha az első súlytól 10 cm-rel előrébb vesszük fel a kezdőpontot. Az ettől mért távolságok rendre: 10 cm, 20 cm, 40 cm, 80 cm, így itt q_2 = 2.
Ennek általános alakja x_1 = 10 cm esetén: $x_n = x_1 \cdot q_2^{n-1}$ (4 pont)

A tömegközéppont számolása: $x_{tkp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ (2 pont)

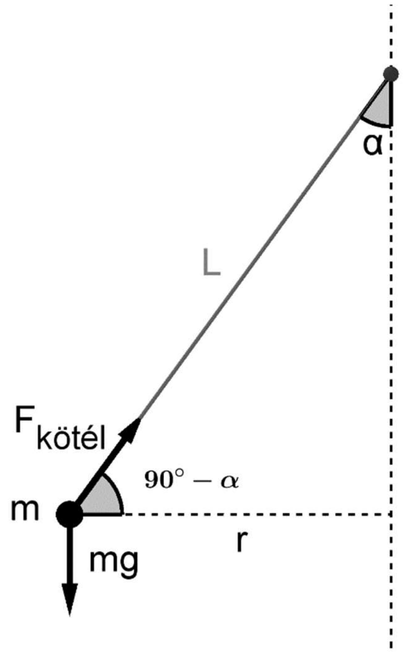
Megjegyzés: A mértani sorozatok tűnnek a legegyértelműbb szabálynak, de bármely más szabályszerűség felfedezése és helyes matematikai leírása esetén jár a teljes pontszám.

A tömegközéppontra az adott négy súly esetén a következő számolható:
$$x_{tkp} = \frac{1000\text{ g} \cdot 10\text{ cm} + 1500\text{ g} \cdot 20\text{ cm} + 2250\text{ g} \cdot 40\text{ cm} + 3375\text{ g} \cdot 80\text{ cm}}{1000\text{ g} + 1500\text{ g} + 2250\text{ g} + 3375\text{ g}} = 49.2\text{ cm} \qquad (2\text{ pont})$$
A nevezőben a tömegek összegzését a mértani sor összegére vonatkozó összefüggéssel számolhatjuk:
$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{m_1 \cdot \left(q_1^n - 1\right)}{q_1 - 1} \qquad (2\text{ pont})$$
Szerencsére a számlálóban található összeg tagjai is mértani sort alkotnak:
$x_n \cdot m_n = \left(x_1 m_1\right) \cdot \left(q_1 q_2\right)^{n-1}$; az első n elem összege pedig: $S = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = \frac{x_1 m_1 \cdot \left(q_1^n q_2^n - 1\right)}{q_1 q_2 - 1}$ (2 pont)
A tömegközéppontra vonatkozó általános összefüggés:
$$x_{tkp} = \frac{S}{M} = \frac{\frac{x_1 m_1 \cdot \left(q_1^n q_2^n - 1\right)}{q_1 q_2 - 1}}{\frac{m_1 \cdot \left(q_1^n - 1\right)}{q_1 - 1}} = x_1 \frac{\left(q_1^n q_2^n - 1\right) \cdot \left(q_1 - 1\right)}{\left(q_1^n - 1\right) \cdot \left(q_1 q_2 - 1\right)}. \qquad (4\text{ pont})$$

Ellenőrzésképp kiszámolhatjuk n = 4-re: $x_{tkp} = 10\text{ cm} \cdot \frac{\left(1.5^4 \cdot 2^4 - 1\right) \cdot \left(1.5 - 1\right)}{\left(1.5^4 - 1\right) \cdot \left(1.5 \cdot 2 - 1\right)} = 49.2$ cm.

9. évf. 3. feladat (1/2 oldal)

a) Rajzoljuk fel a felfüggesztett súlyra ható erőket! (2p)



Az ábra alapján írjuk fel a súly mozgásegyenletét, majd bontsuk szét függőleges és radiális (azaz a tengely felé mutató) komponensekre!

$$m \cdot \vec{a} = \overrightarrow{F_{centrip.}} = \overrightarrow{F_{kötél}} + m \cdot \vec{g} \ (2p)$$

Függőleges irányban (pozitív irány felfelé):

$$0 = \left|\overrightarrow{F_{kötél}}\right| \cdot cos\alpha - m \cdot g \ (2\ p) \to \left|\overrightarrow{F_{kötél}}\right| = \frac{m \cdot g}{cos\alpha} \ \ (2p)$$

Radiális irányban (pozitív irány a tengelytől elfelé):

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \omega^2 \cdot L \cdot sin\alpha = \left|\overrightarrow{F_{kötél}}\right| \cdot sin\alpha \ (2\ p)$$

A fenti két egyenlet alapján, egyszerűsítések után felírhatjuk:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cdot cos\alpha}} \to T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 1{,}32\ s \ (3p)$$

9. évf. 3. feladat (2/2 oldal)

b) A fenti levezetés alapján rövid átrendezéssel megkaphatjuk a periódusidő szögfüggését:

$$T(\alpha) = \frac{2 \cdot \pi}{\omega(\alpha)} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L \cdot cos\alpha}{g}} \ (3p)$$

c) A felfüggesztett súly érintőirányú sebessége megkapható a pályasugár és a súly szögsebességének szorzataként:

$$v_{ker} = r \cdot \omega = L \cdot \ sin\alpha \cdot \omega = L \cdot \ sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{g}{L \cdot cos\alpha}} = \sqrt{L \cdot g} \cdot \frac{sin\alpha}{\sqrt{cos\alpha}} = 1{,}30 \frac{m}{s} \ (3p)$$

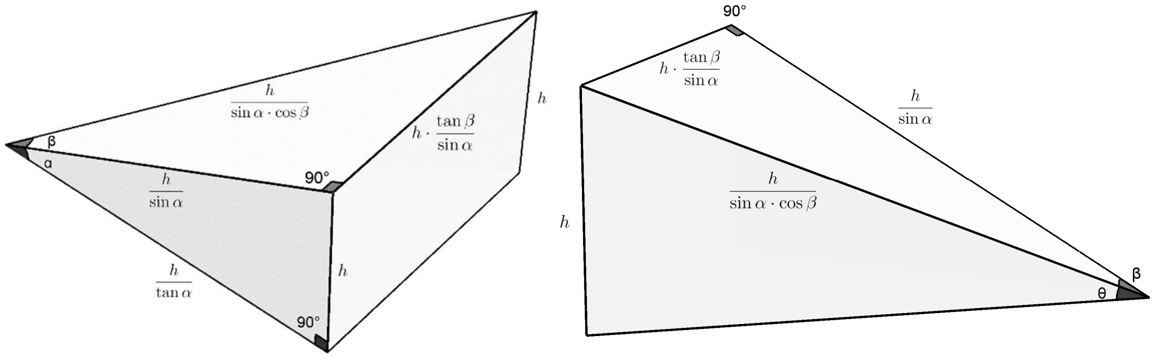
d) A kötélben ébredő erőt már kiszámoltuk előzőleg:

$$\left|\overrightarrow{F_{kötél}}\right| = \frac{m \cdot g}{cos\alpha} = 0{,}5 \ N \ (3p)$$

Azaz a kötélben ébredő erő 0.5 N.

9. évf 4. feladat (1/3 oldal)

I. A lenti ábrákon a lejtő félbevágva látható, ahol a félbevágást a fal és a lejtő síkjának metszési egyenesét tartalmazó függőleges sík mentén végeztük el.



Legyen a keresett szög ϑ. Írjuk fel az ábra segítségével *sin* ϑ-t!

$$sin\vartheta = \frac{h}{l} = sin\alpha \cdot cos\beta\ (3p)$$

A helyes válasz a (b) (2 pont)

II. A háromszögek trigonometrikus azonosságait felhasználva megkaphatjuk, hogy a keresett úthossz a következő:

$$l = \frac{h}{sin\alpha \cdot cos\beta} = \frac{h}{sin\vartheta}\ (3p)$$

A helyes válasz a (d) (2 pont)

III.

c) A tömegpont a falra és a lejtőre egyaránt támaszkodik, és a kifejtett nyomóerők merőlegesek a megfelelő felületre. Newton 3. törvénye miatt a kifejtett nyomóerők nagyságai egyenlőek lesznek a felületek által a tömegpontra kifejtett erők merőleges komponenseivel, így a tömegpont mozgásegyenletét megvizsgálva több információhoz juthatunk. A nyomóerőket *N*, a súrlódási erőket *S* jelöli, megfelelően indexelve.

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} + \overrightarrow{N_{fal}} + \overrightarrow{N_{lejtő}} + \overrightarrow{S_{fal}} + \overrightarrow{S_{lejtő}}\ (1p)$$

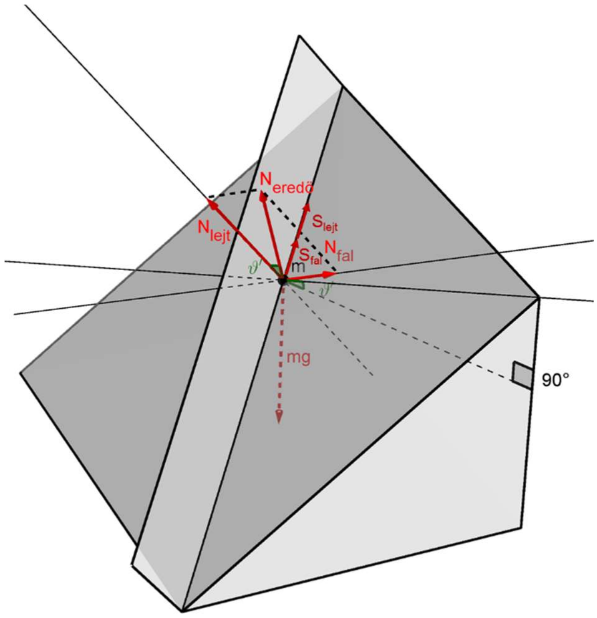
9. évf 4. feladat (2/3 oldal)

Vizsgáljuk meg a mozgásegyenlet a falra merőleges, a lejtő síkjára merőleges, ill. a lecsúszás irányának megfelelő irányokban! A gravitációs gyorsulásvektor megfelelő komponenseit az indexelés jelöli.

$$0 = m \cdot g_{fal} - N_{fal}\ (1p) \rightarrow N_{fal} = m \cdot g_{fal}\ (1p)$$

$$0 = m \cdot g_{lejtő} - N_{lejtő}\ (1p) \rightarrow N_{lejtő} = m \cdot g_{lejtő}\ (1p)$$

$$m \cdot a = m \cdot g_{csúszás} - S_{fal} - S_{lejtő} = m \cdot g \cdot sin\vartheta - S_{fal} - S_{lejtő}\ (1p)$$



Mivel tudjuk, hogy a test egy lejtőn csúszik le, aminek a hajlásszöge ϑ, felírhatjuk, hogy:

$$\left|\overrightarrow{N_{eredő}}\right| = m \cdot g \cdot cos\vartheta$$

Az ábra alapján pedig felírhatjuk a következő összefüggéseket!

$$N_{fal} = \left|\overrightarrow{N_{eredő}}\right| \cdot sin\vartheta'$$

$$N_{lejtő} = \left|\overrightarrow{N_{eredő}}\right| \cdot cos\vartheta'$$

Az ábra alapján kiderül, hogy β' a lecsúszás egyenesére merőleges, a lejtő síkjába eső ferde lejtő hajlásszöge. Az *a-b* feladatrészekben felhasznált okfejtés alapján levezethető, hogy

$$sin\vartheta' = sin\alpha \cdot sin\beta$$

9. évf 4. feladat (3/3 oldal)

Ezek alapján a tömegpont által az egyes felületekre kifejtett nyomóerők nagysága – ami megegyezik a tömegpontra kifejtett erőkével – a következő:

$$N_{fal} = m \cdot g \cdot \sqrt{1 - sin^2\,\alpha \cdot cos^2\,\beta} \cdot sin\alpha \cdot sin\beta \;(1p)$$

$$N_{lejtő} = m \cdot g \cdot \sqrt{1 - sin^2\,\alpha \cdot cos^2\,\beta} \cdot \sqrt{1 - sin^2\,\alpha \cdot sin^2\,\beta} \;\; (1p)$$

A testre kifejtett súrlódási erők az egyes nyomóerők abszolútértékével arányosak. Így a testet lassító súrlódási erő nagysága lecsúszás során:

$$S = S_{fal} + S_{lejtő} = \mu_{fal} \cdot N_{fal} + \mu_{lejtő} \cdot N_{lejtő} =$$

$$= \mu_{fal} \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{1 - sin^2\,\alpha \cdot cos^2\,\beta} \cdot sin\alpha \cdot sin\beta +$$

$$+ \mu_{lejtő} \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{1 - sin^2\,\alpha \cdot cos^2\,\beta} \cdot \sqrt{1 - sin^2\,\alpha \cdot sin^2\,\beta} =$$

$$= m \cdot g \cdot cos\vartheta \cdot \left(\mu_{fal} \cdot sin\alpha \cdot sin\beta + \mu_{lejtő} \cdot \sqrt{1 - sin^2\,\alpha \cdot sin^2\,\beta} \right) \quad (2p)$$

A helyes válasz a (d) (2p)

10. évf 1. feladat

A lineáris hőtágulási törvény értelmében az acél- és a rézrúd hossza T hőmérsékleten

$L_{acél}(T) = L_{acél}(T_0)\cdot\left(1+\alpha_{acél}\cdot(T-T_0)\right)$ és (1 pont)

$L_{réz}(T) = L_{réz}(T_0)\cdot\left(1+\alpha_{réz}\cdot(T-T_0)\right)$ (1 pont)

formában írható fel, ha $L_{acél}(T_0)$ illetve $L_{réz}(T_0)$ az acél- és a rézrúd hossza T_0 = 0 °C-on.
A két egyenletet egymásból kivonva:

$L_{acél}(T)-L_{réz}(T) = L_{acél}(T_0)-L_{réz}(T_0)+\left(L_{acél}(T_0)\cdot\alpha_{acél}-L_{réz}(T_0)\cdot\alpha_{réz}\right)\cdot(T-T_0)$ (2 pont)

A feladat szövege szerint bármely hőmérsékleten állandó Δ = 10 cm különbség van a két rúd között, így:

$L_{acél}(T)-L_{réz}(T) = L_{acél}(T_0)-L_{réz}(T_0)=\Delta=10\text{ cm}$ (4 pont)

Ezt felhasználva a fenti két egyenlet különbségében, azt kapjuk hogy

$0=\left(L_{acél}(T_0)\cdot\alpha_{acél}-L_{réz}(T_0)\cdot\alpha_{réz}\right)\cdot(T-T_0)$ (4 pont)

Ez akkor teljesülhet, ha $L_{acél}(T_0)\cdot\alpha_{acél}=L_{réz}(T_0)\cdot\alpha_{réz}$ (2 pont)

Ebből a két rúd hosszának arányára kapjuk T_0 = 0 °C-on:

$\dfrac{L_{réz}(T_0)}{L_{acél}(T_0)}=\dfrac{\alpha_{acél}}{\alpha_{réz}}=\dfrac{1.21\times10^{-5}\ 1/°\text{C}}{1.66\times10^{-5}\ 1/°\text{C}}=0.729$ (2 pont)

Továbbá:

$L_{acél}(T_0)-L_{réz}(T_0)=10\text{ cm}$

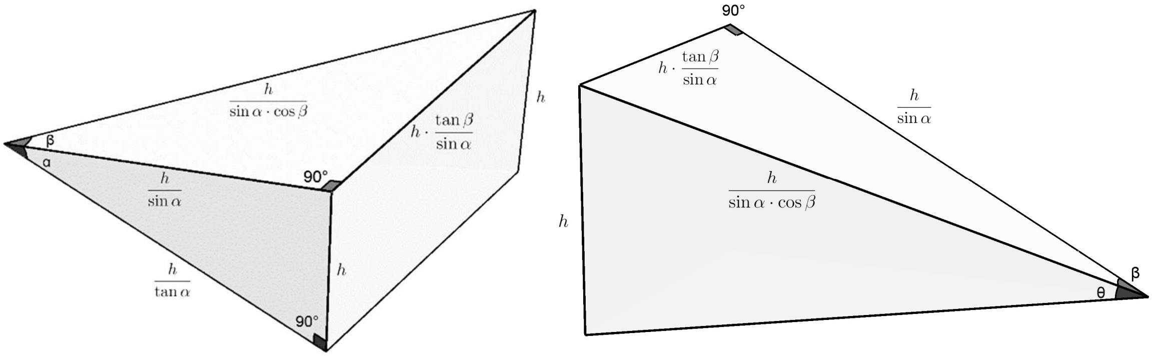
$L_{acél}(T_0)-0.729L_{acél}(T_0)=10\text{ cm}$ (2 pont)

Ebből $L_{acél}(T_0)=\dfrac{10\text{ cm}}{1-0.729}=36.9\text{ cm}$ (2 pont)

Az acélrúd 36.9 cm hosszú, rézrúd hossza pedig 26.9 cm.

10. évf 2. feladat (1/2 oldal)

a) Készítsünk ábrát! (2p) A lenti ábrákon a lejtő félbevágva látható, ahol a félbevágást a fal és a lejtő síkjának metszési egyenesét tartalmazó függőleges sík mentén végeztük el.



A háromszögek trigonometrikus azonosságait felhasználva megkaphatjuk, hogy a keresett úthossz a következő:

$$l = \frac{h}{sin\alpha \cdot cos\beta} \ (2p)$$

b) Legyen a keresett szög ϑ. Írjuk fel az előző ábra segítségével *sin* ϑ-t!

$$sin\vartheta = \frac{h}{l} = sin\alpha \cdot cos\beta \ (1p)$$

c) A tömegpont a falra és a lejtőre egyaránt támaszkodik, és a kifejtett nyomóerők merőlegesek a megfelelő felületre (1p). Newton 3. törvénye miatt a kifejtett nyomóerők nagyságai egyenlőek lesznek a felületek által a tömegpontra kifejtett erők merőleges komponenseivel (1p), így a tömegpont mozgásegyenletét megvizsgálva több információhoz juthatunk. A nyomóerőket *N* jelöli, megfelelően indexelve.

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} + \overrightarrow{N_{fal}} + \overrightarrow{N_{lejtő}} \ (1p)$$

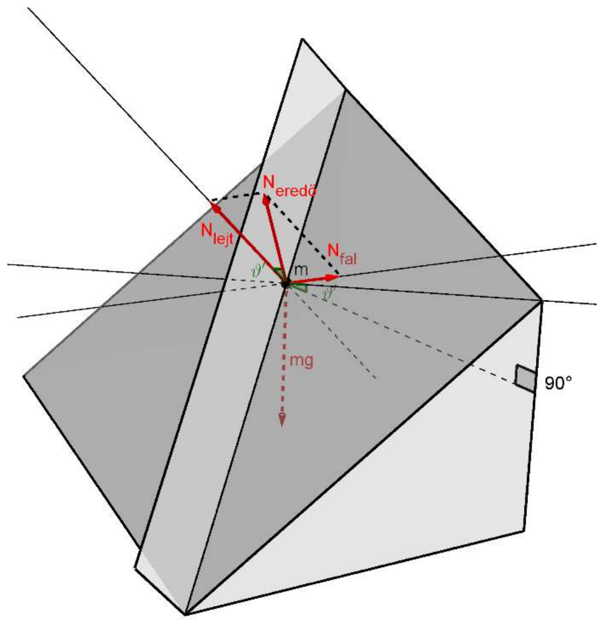
Vizsgáljuk meg a mozgásegyenlet a falra merőleges, a lejtő síkjára merőleges, ill. a lecsúszás irányának megfelelő irányokban! A gravitációs gyorsulásvektor megfelelő komponenseit az indexelés jelöli.

$$0 = m \cdot g_{fal} - N_{fal} \ (1p) \rightarrow N_{fal} = m \cdot g_{fal} \ (1p)$$

$$0 = m \cdot g_{lejtő} - N_{lejtő} \ (1p) \rightarrow N_{lejtő} = m \cdot g_{lejtő} \ (1p)$$

$$m \cdot a = m \cdot g_{csúszás} = m \cdot g \cdot sin\vartheta \ (1p)$$

10. évf 2. feladat (2/2 oldal)



(3p)

Mivel tudjuk, hogy a test egy lejtőn csúszik le, aminek a hajlásszöge ϑ, felírhatjuk, hogy:

$$\left|\overrightarrow{N_{eredő}}\right| = m \cdot g \cdot cos\vartheta \ (1p)$$

Az ábra alapján pedig felírhatjuk a következő összefüggéseket!

$$N_{fal} = \left|\overrightarrow{N_{eredő}}\right| \cdot sin\vartheta'$$

$$N_{lejtő} = \left|\overrightarrow{N_{eredő}}\right| \cdot cos\vartheta'$$

Az ábra alapján kiderül, hogy β' a lecsúszás egyenesére merőleges, a lejtő síkjába eső ferde lejtő hajlásszöge. Az *a-b* feladatrészekben felhasznált okfejtés alapján levezethető, hogy

$$sin\vartheta' = sin\alpha \cdot sin\beta \ (1p)$$

Ezek alapján a tömegpont által az egyes felületekre kifejtett nyomóerők nagysága – ami megegyezik a tömegpontra kifejtett erőkével – a következő:

$$N_{fal} = m \cdot g \cdot \sqrt{1 - sin^2 \alpha \cdot cos^2 \beta} \cdot sin\alpha \cdot sin\beta \ (2p)$$

$$N_{lejtő} = m \cdot g \cdot \sqrt{1 - sin^2 \alpha \cdot cos^2 \beta} \cdot \sqrt{1 - sin^2 \alpha \cdot sin^2 \beta} \ \ (2p)$$

Itt elfogadható a ϑ – ϑ'-s megadás is, ha mind a két szög definiálva van – akár a szinuszának megadásával. Ha a ϑ' nincs definiálva, a megadott eredményekre összesen fél pont adható.

10. évf 3A. feladat (1/2 oldal)

Az n-edik töltés a kezdőponttól $r_n = r_1 \cdot k^{n-1}$ távolságra van, ahol r_1 = 1 cm, k = 2; azaz egy mértani sort alkotnak. A potenciál azonos töltések esetén a kezdőpontban:

$$U_1 = \sum_n \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{1}{r_1 \cdot k^{n-1}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{1}{r_1}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \qquad \text{(2 pont)}$$

A szummában lévő kifejezés továbbra is mértani sor maradt, így az összegzési szabály szerint

$$\sum_n \frac{1}{r_1}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} = \frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{2}{r_1} \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből az elektromos potenciálra $U_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{r_1} = 1.80\times10^6\ \mathrm{V}$ adódik. (1 pont)

A térerősség:

$$E_1 = \sum_n \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_n^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{1}{r_1^2 \cdot k^{2n-2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{1}{r_1^2}\cdot\left(\frac{1}{k^2}\right)^{n-1} \qquad \text{(2 pont)}$$

A mértani sor összegére vonatkozó összefüggést továbbra is alkalmazhatjuk:

$$\sum_n \frac{1}{r_1^2}\cdot\left(\frac{1}{k^2}\right)^{n-1} = \frac{1}{r_1^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k^2}} = \frac{4}{3r_1^2} \qquad \text{(2 pont)}$$

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3r_1^2} = 1.20\times10^8\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \qquad \text{(1 pont)}$$

Váltott előjelű töltések esetén két mértani sor különbségére bonthatóak a problémák:

$$U_2 = \sum_n \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-1)^{n-1}\cdot q}{r_n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{1}{r_1\cdot(2k)^{n-1}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{1}{2r_1\cdot(2k)^{n-1}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(q-\frac{q}{2}\right)\cdot\sum_n \frac{1}{r_1}\cdot\left(\frac{1}{2k}\right)^{n-1}$$

(2 pont)

Az összeg: $\sum_n \frac{1}{r_1}\cdot\left(\frac{1}{2k}\right)^{n-1} = \frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2k}} = \frac{4}{3r_1}$ (2 pont)

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(q-\frac{q}{2}\right)\cdot\frac{4}{3r_1} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_1} = 6.00\times10^5\ \mathrm{V}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A térerősség:

$$E_2 = \sum_n \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-1)^{n-1}\cdot q}{r_n^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{1}{r_1^2\cdot(2k)^{2n-2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{1}{(2r_1)^2\cdot(2k)^{2n-2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(q-\frac{q}{4}\right)\cdot\sum_n \frac{1}{r_1^2}\cdot\left(\frac{1}{4k^2}\right)^{n-1} \qquad \text{(2 pont)}$$

10. évf 3A. feladat (2/2 oldal)

Az összeg: $\sum_n \frac{1}{r_1^2} \cdot \left(\frac{1}{4k^2}\right)^{n-1} = \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4k^2}} = \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{16}{15}$ (2 pont)

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(q - \frac{q}{4}\right) \cdot \sum_n \frac{1}{r_1^2} \cdot \left(\frac{1}{4k^2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(q - \frac{q}{4}\right) \cdot \frac{16}{15 r_1^2} = \frac{1}{5\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_1^2} = 7.19 \times 10^7 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$ (1 pont)

10. évf 3B. feladat

a) Írjuk fel a dugattyú mozgásegyenletét mind a két esetre! A feladat szövege alapján a dugattyúra csak függőleges irányú erők hatnak. Mivel kvázisztatikus folyamatról beszélünk, ezért a fel- és lefelé irányuló mogások gyorsulások zérusnak tekinthető. Ekkor a mozgásegyenlet, ha a dugattyút felfelé, majd lefelé húzzuk:

$$0 = m \cdot a_{fel} = (p_{belső} - p_{külső}) \cdot A - M \cdot g + F_{fel} - F_{súrl}^{max}\ (2p)$$

$$0 = m \cdot a_{le} = (p_{belső} - p_{külső}) \cdot A - M \cdot g - F_{le} + F_{súrl}^{max}\ (2p)$$

A két egyenletet egymásból kivonva megkapjuk, hogy

$$F_{le} + F_{fel} = 2 \cdot F_{súrl} \rightarrow F_{súrl} = \frac{462 + 341}{2} = 401{,}5\ N\ (3p)$$

b) A dugattyú mozgása során az első fázisban melegítjük, és kitágul. Ekkor mozgását az első mozgásegyenlet szabályozza úgy, hogy $F_{fel} = 0$. Ennek megfelelően az egyenletből kifejezhető, hogy a tágulás során a gáz nyomása állandó marad, tehát izobár folyamatról beszélünk. (1p)

Hasonló megállapításokat tehetünk a harmadik fázisról is, ahol a gáz izobár módon húzódik össze. (1p)

A kettő között a súrlódási erő nagysága változik a hűtés során, a dugattyú pozíciója pedig nem változik. Ennek megfelelően isochor állapotváltozásról beszélhetünk. (1p)

A negyedik fázisban hőközlés nélkül nyomjuk össze a gázt, csupán fizikai munkavégzéssel. Ez a definíció alapján adiabatikus állapotváltozás. (1p)

c) Írjuk fel a dugattyú mozgásegyenletét a *B* és a *C* pontokban! A *B* pontban az elérhető nyomás maximális, ennél nagyobb nyomás esetén a dugattyú felfelé mozdulna el. A súrlódási erő így maximális nagyságú, és lefelé mutat (1p). A *C* pontban az előrhető nyomás minimális, s a súrlódási erő maximális, és felfelé mutat. (1p)

$$0 = m \cdot a_{fel} = (p_B - p_{külső}) \cdot A - M \cdot g - F_{súrl}^{max}\ (2p)$$

$$0 = m \cdot a_{le} = (p_C - p_{külső}) \cdot A - M \cdot g + F_{súrl}^{max}\ (2p)$$

A kettő egyenletet egymásból kivonva megkapjuk, hogy

$$(p_B - p_C) \cdot d^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 \cdot F_{súrl}^{max} (1p)$$

$$2 \cdot F_{súrl}^{max} = 803\ N \rightarrow d = 12\ cm\ (2p)$$

Azaz azt kaptuk, hogy a dugattyú átmérője 12 cm.

10. évf 4. feladat (1/2 oldal)

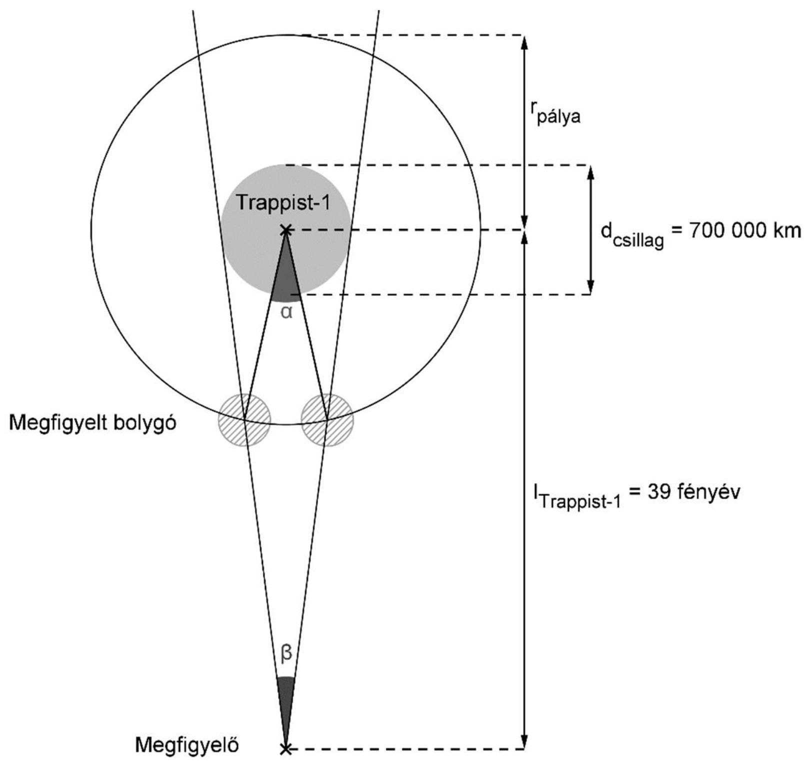
Helyes válaszért 2p adható, indoklás szükséges a maximális pontszám eléréséhez.

I. Az egyes bolygók áthaladási idejeit a grafikonról leolvashatjuk, ezek átlagát véve megkapjuk az átlagos áthaladási időt. (7×0.5p/helyesen leolvasott érték, 0.5p a helyes számolásért). A helyes válasz a c. (2 pont)

Az egyes áthaladási idők a fent említett cikk alapján:

Bolygó	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
Áthaladási idő (perc)	36,4	42,4	49,1	57,2	62,6	68,4	76,7

II. A pályasugár kiszámításához tekintsük a következő ábrát!



A grafikonon a sötétedést a bolygónak a csillag előtti elhaladása okozza. A bolygó csillag előtt való elhaladásának idejét fogjuk vizsgálni. Az egyszerűség kedvéért úgy vesszük, hogy az áthaladás akkor kezdődik meg, amikor a bolygó középpontja a csillag látószög szerinti egyik szélét takarja el, és akkor végződik, amikor a másikat takarja el. (1p)

10. évf 4. feladat (2/2 oldal)

Mivel a csillag tőlünk mért távolság a *c* bolygó és a csillagának távolságához képest nagyon nagy, a csillag látószöge nagyon kicsi lesz – felhasználhatjuk azt a közelítést, hogy a sötétedés során a bolygó a csillag előtt éppen a csillag átmérőjének megfelelő utat teszi meg, azaz, ha a keresett pályasugár *r*:

$$r \cdot \alpha = d_{csill}\ (1p)$$

ahol α a bolygó áthaladás során megtett útjának a csillag középpontjából vett látószöge.

Ezen kívül tudjuk, hogy a sötétedés során eltelt időnek a teljes periódus megtételéhez szükséges idővel vett aránya jó közelítéssel megegyezik a csillag közepéből a bolygó sötétedés alatti pályájának látószögével:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\alpha}{2 \cdot \pi}\ (1p)$$

Ezek alapján a bolygó pályasugara a fent megadott értékek alapján:

$$r = \frac{d_{csill} \cdot T}{2 \cdot \pi \cdot \Delta t} = 2{,}09\ millió\ km\ (2p)$$

A helyes válasz a d. (2 pont) A cikk alapján ez az érték egyébként kb. 2.275 millió km. A különbséget a felhasznált modellek, ill. a közelítések eltérése okozza.

III) A csillag tömegét számoljuk ki a Newton-féle tömegvonzási egyenlet segítségével! A számolást végezzük el az előző feladatrészben is megemlített TRAPPIST-1c bolygó segítségével. Írjuk fel a bolygó mozgásegyenletét, feltételezve, hogy tömege jóval kisebb a csillagénál, és a csillag körül körpályán kering.

$$M_{bolyg} \cdot a = F_{centrip} = M_{bolyg} \cdot \omega^2 \cdot r = \gamma \cdot \frac{M_{csill} \cdot M_{bolyg}}{r^2}\ (3p)$$

$$M_{csill} = \frac{\omega^2 \cdot r^3}{\gamma} = 123 \cdot 10^{27}\ kg\ (2p)$$

A helyes válasz az b. (2 pont)

A cikk alapján ez az érték $159{,}48 \cdot 10^{27}\ kg$, ami a fenti képlet segítségével ki is jönne, ha a pályasugarat az előző feladatrészben pontosan ismertük volna. Ezt tükrözik a válaszként megadott érték-tartományok is.

XXI. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny a református középiskolák számára 2017

A versenydolgozatok megírására 3 óra áll a diákok rendelkezésére, minden tárgyi segédeszköz használható.

3 feladatot és egy tesztfeladatot kell megoldani. A feladatok és tesztfeladat teljes és hibátlan megoldása egyenként 20 pontot ér, a tesztfeladat esetén a választást meg kell indokolni.

Jó munkát kíván a feladat kitűzője és segítői! ***Dömötör Piroska, Benedict Mihály, Galzó Ákos***

11. osztály – Megoldások

1. Feladat: Egy kerékpárversenyző mozgását vizsgáljuk vízszintes terepen, szélcsendes időben. Ekkor föltételezhetjük, hogy adott v sebesség esetén a kerékpáros mozgását akadályozó eredő erő nagyságát az alábbi formula szolgáltatja:

$$F = A\,v^2 + B \qquad \text{(itt } A \text{ és } B \text{ megfelelő konstansok.)}$$

Vízszintes terepen, szélcsendes időben megmértük a kerékpáros által kifejtett teljesítményt különböző haladási sebességek esetén. A teljesítmény mérések eredményeit az alábbi táblázat tartalmazza:

v [m/s]	1.4	3.2	4.7	6.5	8.5	9.8	11.2	12.1
P $[W]$	6	19	37	82	149	224	298	373

(a) A táblázat adatait használva készítsen grafikont, amelynek segítségével az A és B állandók meghatározhatóak, és adja is meg az állandókat!

(b) A kerékpáros képes hosszabb időn keresztül 60 W teljesítménnyel tekerni. Ilyen tekerési teljesítmény mellett becsülje meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el vízszintes terepen, szélcsendben?

(c) Mit jelenthetnek az erő kifejezésében az Av^2 és a B tagok?

(d) Hogyan változik a kerékpáros elérhető maximális sebessége (60 W-os teljesítmény mellett), ha tartósan 7,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ás ellenszélben kell tekernie?

Megoldás: **(8p+8p+2p+2p az egyes kérdésekre.)**

Jelölések & adatok: $P_0 = 60\,\text{W}, \quad v_{\text{szél}} = 7{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{7{,}2}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$

(a) Az eredő erő mint látjuk sebesség függő. De ha már állandósult a mozgás (stacionárius eset), akkor a sebesség nagysága, és így az eredő erő nagysága is állandó.
Az állandósult mozgás sebességével, illetve az eredő erővel (ami ellenében a kerékpáros munkát végzett) kapcsolatba hozható a mért teljesítmény:

$$\boxed{P = F\,v} \qquad \left[P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} = F\,v\right]$$

Ezt dimenzionálisan is ellenőrizhetjük:

$$\left[\frac{P}{v}\right] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,/\,s}} = \frac{(\mathrm{N\ \ m\,/\,s})\ \ \mathrm{s}}{\mathrm{m}} = \mathrm{N}\,.$$

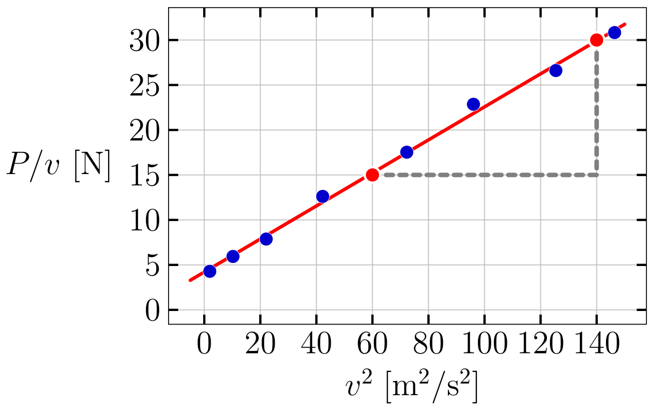
Tehát a megadott összefüggés alapján a P/v hányados, azaz a kifejtett erő lineáris függvénye a v^2 sebességnégyzetnek:

$$\frac{P}{v} = A\,(v^2) + B.$$

Így v^2 függvényében kell a P/v-t ábrázolnunk, ekkor nagyjából egy egyenest kapunk, amelynek meredeksége szolgáltatja A-t, tengelymetszete pedig B-t. A mérési adatok alapján:

v^2 $[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}]$	1.96	10.24	22.09	42.25	72.25	96.04	125.44	146.41
$F = P/v$ [N]	4.3	5.9	7.9	12.6	17.5	22.9	26.6	30.8

Az adatokat ábrázolva:



$$\text{meredekség:}\quad A = \frac{(30-15)\,\mathrm{N}}{(140-60)\,\mathrm{m^2/s^2}} = \frac{15}{80}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2/s^2}} = \underline{\underline{0{,}19\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2/s^2}}}} \qquad \text{tengelymetszet:}\quad B = \underline{\underline{4{,}2\,\mathrm{N}}}$$

Megjegyzés: A tengelymetszet az első mérési adathoz (4,3 N) nagyon közel kell essen (és annál kisebb), hiszen ott v^2 közel 0 (a többi értékhez képest).

(b) A korábbiak alapján az alábbi egyenletet kellene megoldani:

$$\frac{P_0}{v} = (A\,v^2 + B).$$

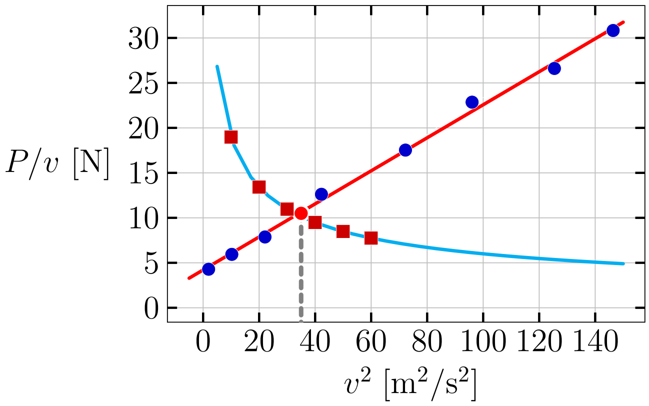
Ez egy harmadfokú egyenlet, de algebrai megoldás helyett a keresett sebesség grafikusan becsülhető. A mérési adatok alapján biztos, hogy a 60 W-hoz tartozó sebességre: $\boxed{4{,}7 < v < 6{,}5}$.

1. Megoldás: Az előző grafikont fölhasználva, ahol v^2 függvényében ábrázoltunk, keressük az ottani grafikonnak és a

$$\frac{P_0}{v} = \frac{P_0}{\sqrt{(v^2)}}$$

függvénynek a metszéspontját.
Néhány érték alapján a függvény grafikonját vázolva:

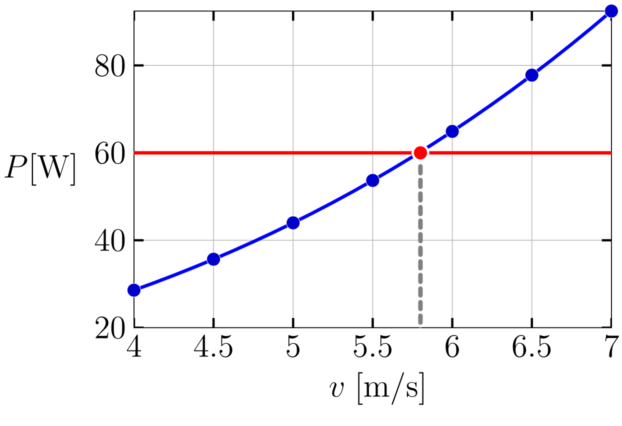
v^2 [$\frac{m^2}{s^2}$]	10	20	30	40	50	60
$P_0/\sqrt{v^2}$ [N]	18.97	13.42	10.95	9.49	8.48	7.75



A metszéspont kb. $v^2 = 35\,\mathrm{m^2/s^2}$-nél van, így az elérhető sebesség: $\underline{\underline{v = \sqrt{35}\,\frac{m}{s} = 5{,}9\,\frac{m}{s}}}$

2. Megoldás: Ábrázolva a teljesítményt a sebesség függvényében azaz a $P(v) = A\ v^3 + B\ v$ függvényt az előbb kiszámolt A-val és B-vel. Milyen v-nél éri el a P_0-at?
Néhány érték alapján a függvény grafikonját vázolva:

v[m/s]	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$P[W]$	28.6	35.7	43.9	53.7	64.9	77.8	92.4



A függvény kb. $v = 5{,}8\,\frac{m}{s}$-nál éri el a 60 W-ot, így a keresett sebesség: $\underline{\underline{v = 5{,}8\,\frac{m}{s}}}$.

(kb. $\pm 0{,}4\,\frac{m}{s}$ hiba még belefér.)

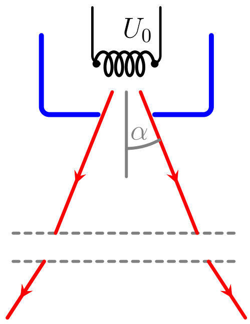
(c) Az egyes tagok jelentése:

- Av^2 : a levegő közegellenállásából adódó erő (v a közeghez képesti sebesség lenne, de szélcsendben ez megegyezik a kerékpáros sebességével, lásd (d) pont.)
- B : állandó súrlódási erő, az alkatrészek súrlódásából (lánc, csapágyak ...), illetve gördülési ellenállás.

(d) Az Av^2 kifejezésben v a közeghez képesti sebesség, azaz ellenszélben: $v = v_{\text{kerekp}} + v_{\text{szél}}$. Tehát a kerékpáros adott teljesítménnyel úgy mozog ellenszélben, mintha $v_{\text{kerekp}} + v_{\text{szél}}$ sebességgel haladna szélcsendben:

$$v_{\text{kerekp}} = v - v_{\text{szél}} = 5{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{7{,}2}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = (5{,}8-2)\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{3{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

2. Feladat: Egy vákuumcsőben az izzószálból kilépő elektronok α félnyílásszögű nyalábban hagyják el az U_0 gyorsítófeszültségű anódot. Útjukba állítunk egy fémhálópárt, amelynek hálói között potenciálkülönbség van. Mekkora legyen ez a potenciálkülönbség, hogy a nyaláb nyílásszöge megkétszereződjék?
[$\alpha = 30°$, $U_0 = 10\,000\,\text{V}$, ezek az elektronok még „lassúak”, nem relativisztikusak, nyugodtan használhatunk klasszikus fizikai megfontolásokat.]

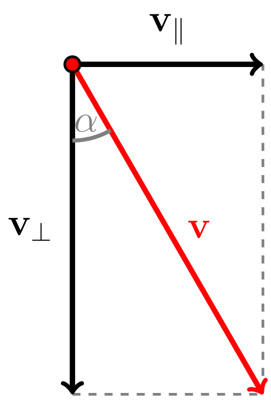


Megoldás:

Jelölések & adatok: $U_0 = 10\,000\,\text{V} = 10^4\,\text{V}$, $\alpha = 30°$, $q_e = 1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{C}$, $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}\,\text{kg}$.

A nyaláb szélén haladó elektronok sebesség komponensei a hálók közt áthaladás előtt:

$$v_\perp = v\cdot\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}v; \qquad v_\parallel = v\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}v.$$

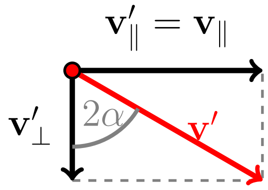


A nyaláb szélén haladó elektronok sebesség komponensei a hálók közt áthaladás után:

$$v'_\perp = v'\cdot\cos(2\alpha) = \frac{1}{2}v'; \qquad v'_\parallel = v'\cdot\sin(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}v'.$$

Mivel a párhuzamos komponens nem változik, a sebesség nagyságok kapcsolata

$$v_\parallel = v'_\parallel \quad\Rightarrow\quad v\cdot\sin\alpha = v'\cdot\sin(2\alpha) \quad\Rightarrow\quad v' = \frac{v\sin\alpha}{\sin(2\alpha)} = \frac{v}{2\cos\alpha} = \frac{v}{\sqrt{3}}.$$



Ahogyan azt az ábrán is rajzoltuk, a szög megváltozását az elektronok merőleges sebesség komponensének csökkenése okozza. Tehát egy a gyorsító feszültséggel ellentétes előjelű feszültség fékezi a hálók közt áthaladó elektronokat. **(10 p idáig)**
Az elektronon végzett munka: $W_{\text{mező}} = q_e U = U[\text{eV}]$
A sebesség csökkenését nyomon követhetjük a munka tétel alapján:

$$E'_{\text{kin}} - E_{\text{kin}} = W_{\text{mező}}$$

A kinetikus energiák arányát a sebesség nagyságokra tett megfontolások alapján ismerjük:

$$\frac{E'_{\text{kin}}}{E_{\text{kin}}} = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Itt kihasználtuk, hogy az elektron „lassú”, azaz érvényes a szokásos $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ összefüggés. (*)

Joule helyett elektronvoltban számolva azonnal a helyes eredményt kapjuk, hiszen ekkor az U_0 gyorsítófeszültség éppen U_0 [eV] kinetikus energiát ad az elektronnak:

$$U_0 = 10^4\,\mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad E_{\mathrm{kin}} = 10^4\,\mathrm{eV}\,.$$

A mező által a lassítás során végzett munka:

$$W_{\text{mező}} = \left(\frac{1}{3} - 1\right) E_{\mathrm{kin}} = -\frac{2}{3} \cdot 10^4\,\mathrm{eV} = -6{,}67 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}$$

Tehát az eredeti gyorsító feszültséggel ellentétes előjelű $\underline{\underline{U = 2/3 \cdot 10^4\,\mathrm{V}}}$ nagyságú potenciál különbség lassította az elektronokat.

Esetleg a sebességeket is kiszámítva:

$$U_0 = 10^4\,\mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad E_{\mathrm{kin}} = 10^4\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$$

$$. \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\,E_{\mathrm{kin}}}{m}} = 5{,}93 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad v' = \frac{v}{\sqrt{3}} = 3{,}42 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(*) Megjegyzés: Ez valóban jóval kisebb mint a $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ fénysebesség.
Persze ez az érvelés nem teljesen korrekt, hiszen itt már a klasszikus mechanikai formulát használtuk, ami eleve csak c-hez képest kis sebességekre igaz.
A teljesen korrekt számolás a kinetikus energia relativisztikus kifejezéséből:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 = \frac{E_{\mathrm{kin}}}{mc^2} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-15}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}(3 \cdot 10^8)^2} = 0{,}0195$$

Tehát

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(0{,}0195+1)^2}} = 0{,}19 \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}19 \cdot (3 \cdot 10^8) = 5{,}84 \cdot 10^7$$

Az eltérés a klasszikusan számolt sebességtől igen pici, 2%-on belül van.

(plussz pont ha foglalakozik a „lassúság” kérdésével)

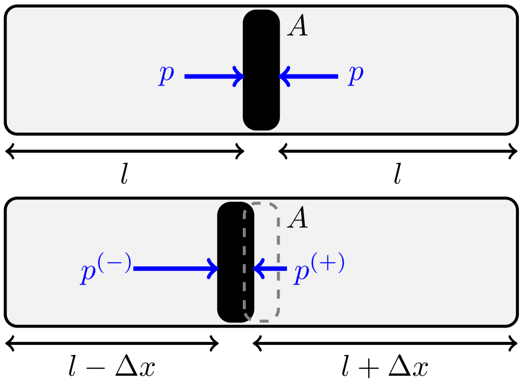
3. Feladat: Tökéletesen sima, könnyen mozgó, m tömegű, A keresztmetszetű hengeres dugattyú szorosan illeszkedik egy vízszintes, mindkét végén lezárt csőbe, melyben levegő van. Egyensúlyi helyzetben a dugattyú mindkét oldalán azonos térfogatú és megegyező p nyomású levegőoszlop található. Mutassuk meg, hogy a dugattyú kis kimozdítást követően harmonikus rezgőmozgásba jön. Számítsuk ki a rezgőmozgás periódusidejét!
[$m = 50\,\mathrm{g}$, $A = 2\,\mathrm{cm}^2$, $l = 50\,\mathrm{cm}$, $p = 10^4\,\mathrm{Pa}$.] (Tegyük fel, hogy a hőmérséklet végig változatlan.)

Megoldás:

Jelölések & adatok: $m = 50\,\mathrm{g} = 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}$, $A = 2\,\mathrm{cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, $l = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $p = 10^4\,\mathrm{Pa}$.

Állandó hőmérsékleten vagyunk, így a dugattyú kicsiny elmozdulása esetén érvényes a Boyle-Mariotte-törvény: $p \cdot V =$ állandó.

Ezt fölhasználva a kicsiny elmozdulás következtében a bal és jobb oldalon kialakuló nyomás kifejezhető az eredeti nyomással és a hosszváltozásokkal (Az ábra jelöléseit használva):



$$p^{(-)} \cdot A\,(l-\Delta x) = p \cdot A\; l \quad \Rightarrow \quad p^{(-)} = p\,\frac{l}{l-\Delta x}$$

$$p^{(+)} \cdot A\,(l+\Delta x) = p \cdot A\; l \quad \Rightarrow \quad p^{(+)} = p\,\frac{l}{l+\Delta x}$$

Tehát a baloldalon megnövekszik a nyomás, míg a jobboldalon csökken, ennek megfelelően a dugattyúra a Δx kitéréssel ellentétes irányú

$$F = (p^{(-)} - p^{(+)}) \cdot A$$

nagyságú visszatérítő erő fog hatni.
A mozgás harmonikus rezgőmozgás lesz, ha az azt létrehozó erő a rugóerőhöz hasonlatos ($F = -D{\cdot}\Delta x$ típusú), azaz a kitéréssel arányos nagyságú és azzal ellentétes irányú.
Az irány nyilván stimmel. A nagysághoz pedig vizsgáljuk meg a nyomáskülönbség kifejezését:

$$p^{(-)} - p^{(+)} = p\;l\left(\frac{1}{l-\Delta x} - \frac{1}{l+\Delta x}\right) = p\;l\left(\frac{(l+\Delta x)-(l-\Delta x)}{l^2-\Delta x^2}\right) = p\;l\,\frac{2\Delta x}{l^2-\Delta x^2}.$$

(10 p ha idáig eljut, de nem ismeri föl az elhanyagolás lehetőségét)
A Δx elmozdulás kicsiny, azaz jóval kisebb mint l, így a nevezőben az l^2 mellet a Δx^2 elhanyagolható:

$$\Delta x \ll l \quad \Rightarrow \quad p^{(-)} - p^{(+)} \approx p\;l\,\frac{2\Delta x}{l^2} = \boxed{2p\,\frac{\Delta x}{l}}.$$

A visszatérítő erő nagysága tehát kis kitérés esetén valóban arányos a kitéréssel:

$$F \approx \left(2\,p\,\frac{\Delta x}{l}\right)\;A = \underbrace{\boxed{\frac{2\,p\;A}{l}}}_{D}\,\Delta x.$$

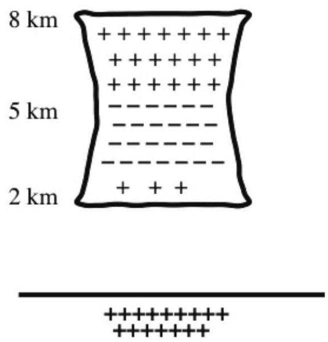
A periódusidő a rugóval való analógia alapján számítható. Ahol a D arányossági tényező:

$$D = \frac{2\,p\;A}{l} = \frac{2\cdot 10^4\cdot 2\cdot 10^{-4}}{0{,}5} = 8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$

A körfrekvenciára adódó dinamikai föltételből pedig a periódusidő:

$$m\,\omega^2 = D \quad \Leftrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{5\cdot 10^{-2}}{8}} = 0{,}497\,\mathrm{s} = \underline{\underline{0{,}5\,\mathrm{s}}}.$$

4. Feladat: Viharok kialakulása során a felhő alja tipikusan a földfelszíntől 2 km magasságban kezdődik, míg a felhő legteteje kierjed egészen a földfelszíntől 8 km távolságra is. A felhőn belül igen bonyolultan helyezkednek el a töltések. A felhő tetejének mindig nagy pozitív töltése van; a középső résznek nagy negatív töltése; míg a felhő alsó része gyengébb pozitív töltést hordoz. Mindeközben a földfelszínen – a megosztás révén – pozitív töltések jelennek meg. (Lásd a sematikus ábrát.) A felhő alja és földfelszín között kialakuló potenciálkülönbség 10^8 Volt körüli.



Amikor a villám lecsap a felhő negatív töltéseinek egy része semlegesíti a földfelszínen összegyűlt pozitív töltéseket. Egy-egy villámcsapás során körülbelül 4 coulombnyi negatív töltés vándorol a felhőből a földfelszínre, amely 20 kA áramot képvisel. Ez nagy energia fölszabadulással jár, mely disszociációt, ionizációt, molekulák gerjesztését okozza a levegőben, továbbá a gázok fölmelegedéséhez és hirtelen kitágulásához vezet, és elektromágneses sugárzás is keletkezik.

A villámlás által veszélyeztetett helyeket és épületeket villámhárítóval látják el. A villámhárító hosszú fémrúdjának egyik vége földelt míg másik, hegyes végződésű vége messze túlnyúlik a környező épületeken. Egy ilyen hegyes fémrúd képes elvezetni az épület környezetében felhalmozódó elektromos töltéseket, ezáltal csökkentve a töltés-egyenlőtlenséget, és visszaszorítva a villámlás valószínűségét. Ha pedig a villám mégis lecsap, akkor az épület helyett inkább a villámhárítóba csap, mely a villám áramát a talajba vezeti, így az épületet megóvja a villámcsapás közvetlen károsító hatásaitól.

1. Nagyjából mekkora a vihar során létrejövő elektromos mező nagysága?

   A. $2 \cdot 10^2$ N/C
   B. $5 \cdot 10^4$ N/C
   C. $5 \cdot 10^6$ N/C
   D. $2 \cdot 10^{11}$ N/C

2. Mekkora effektív ellenálláson áramlanak keresztül a töltések egy villámcsapás során?

   A. $5000\,\Omega$
   B. $2 \cdot 10^4\,\Omega$
   C. $5 \cdot 10^6\,\Omega$
   D. $2 \cdot 10^7\,\Omega$

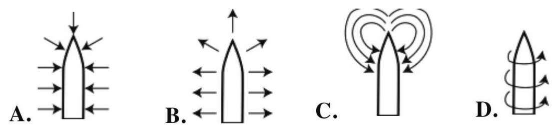
3. Mekkora energia szabadul el egy villámcsapás során?

   A. $8 \cdot 10^4$ J
   B. $4 \cdot 10^8$ J
   C. $2 \cdot 10^{12}$ J
   D. Nincs elég információnk ahhoz, hogy megválaszoljuk a kérdést.

4. Körülbelül mennyi ideig tart egy villámcsapás?

   A. $2 \cdot 10^{-4}$ másodperc
   B. $5 \cdot 10^{-3}$ másodperc
   C. $2 \cdot 10^{-2}$ másodperc.
   D. 0,5 másodperc.

5. Az alábbi ábrák közül melyik szemlélteti helyesen a villámhárító körül kialakuló elektromos mezőt?



6. Az alábbiak közül melyik folyamat felelős leginkább a villámlást kísérő fényjelenségért?

   A. a molekulák disszociációja
   B. a molekulák gerjesztődése
   C. a levegő fölmelegedése
   D. a levegő hirtelen kitágulása

Megoldás: **(3p+3p+3p+3p+4p+4p, indoklás nélkül a fele)**

1. Nagyjából mekkora a vihar során létrejövő elektromos mező nagysága?
   A. $5 \cdot 10^4\,\text{N/C}$

   Ezt a megadott potenciálkülönbségből $U = 10^8\,\text{V}$ és a nagyságrendileg $d = 2\,\text{km} = 2 \cdot 10^3\,\text{m}$-es felhő alja és a földfelszín távolságból lehet becsülni:

$$U = E \cdot d \quad \Rightarrow \quad E = \frac{U}{d} = \frac{10^8\,\text{J/C}}{2 \cdot 10^3\,\text{m}} = 5 \cdot 10^4\,\text{N/C}\,.$$

2. Mekkora effektív ellenálláson áramlanak keresztül a töltések egy villámcsapás során?
   A. $5000\,\Omega$

   A felhő alja és a földfelszín közötti potenciálkülönbségből $U = 10^8\,\text{V}$ és a villámcsapás során átfolyó áram erősségéből: $I = 20\,\text{kA} = 2 \cdot 10^4\,\text{A}$, Ohm törvénnyel számolható:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10^8\,\text{V}}{2 \cdot 10^4\,\text{A}} = 5 \cdot 10^3\,\Omega = 5000\,\Omega\,.$$

3. Mekkora energia szabadul fel egy villámcsapás során?
   B. $4 \cdot 10^8\,\text{J}$

   A potenciálkülönbségből kiszámítható a mező által a mozgatott töltéseken ($Q = 4\,\text{C}$) végzett munka:

$$W = U \cdot Q = 10^8\,\text{V} \cdot 4\,\text{C} = 4 \cdot 10^8\,\text{J}\,.$$

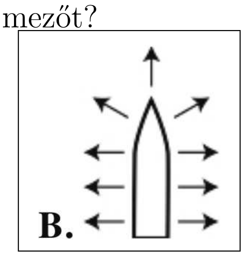
   Tehát ennyi energia szabadulhat fel egy villámcsapás során.

4. Körülbelül mennyi ideig tart egy villámcsapás?
   A. $2 \cdot 10^{-4}$ másodperc

   A villámlás során áthaladt töltések számából és az általuk képviselt áramerősségből:

$$Q = I \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{Q}{I} = \frac{4\,\text{As}}{2 \cdot 10^4\,\text{A}} = 2 \cdot 10^{-4} s$$

5. Az alábbi ábrák közül melyik szemlélteti helyesen a villámhárító körül kialakuló elektromos mezőt?



   Az elektromos mező a villámhárítótól „elfelé” mutat, hiszen egy pozitív próbatöltésre a villámhárító elhagyását okozó vonzó erő lép föl a felhő részéről. (Mindez különösen igaz a csúcsos végére.)

6. Az alábbiak közül melyik folyamat felelős leginkább a villámlást kísérő fényjelenségért?
   B. a molekulák gerjesztődése

   A molekulák gerjesztődése során a molekula elektronjai magasabb energiájú pályára kerülnek. Ez az állapot nem stabil, és amikor az elektron visszatér alacsonyabb energiájú állapotba, elektromágneses sugárzást bocsájt ki (látható tartományba eső-t is). A molekulák disszociációja is okozhat némi fénykibocsátást, de nem ez a domináns. A maradék kettő válasz pedig a kísérő „dörgés”-t magyarázza.

   (Az ionizáció majd utána az ionok rekombinációja szintén fényjelenséggel jár, de ez a válaszlehetőség nem szerepel.)

XXI. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára
2017

A versenydolgozatok megírására 3 óra áll a diákok rendelkezésére, minden tárgyi segédeszköz használható.

3 feladatot és egy tesztfeladatot kell megoldani. A feladatok és tesztfeladat teljes és hibátlan megoldása egyenként 20 pontot ér, a tesztfeladat esetén a választást meg kell indokolni.

Jó munkát kíván a feladat kitűzője és segítői! ***Dömötör Piroska, Benedict Mihály, Galzó Ákos***

12. osztály – Megoldások

1. Feladat: Klasszikus fizikai megfontolások alapján vezesse le, hogy a neutron kinetikus energiája egy kezdetben nyugalomban lévő A tömegszámú atommaggal való (centrális) rugalmas ütközést követően:

$$E = E_0[(A-1)/(A+1)]^2, \qquad \text{ahol } E_0 \text{ a neutron kezdeti kinetikus energiája.}$$

Ezen számolás alapján indokolja meg, hogy milyen típusú anyag lenne a legalkalmasabb a neutronok leárnyékolásához.
Tegyük föl, hogy a fönti formula alkalmazható grafit moderátor esetén az összes végbemenő ütközés esetére. Hány ütközés szükséges ahhoz, hogy egy 3 MeV-os neutron termális egyensúlyba kerüljön szobahőmérsékletű környezetével?
Indokolja meg, hogy egy 3 MeV-os neutront miért írhatunk még le klasszikus fizikai megfontolásokkal, és miért nem kell a relativisztikus effektusokkal törődnünk!
[grafit: ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$; $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.]

Megoldás: **(8p + 2p + 6p + 4p az egyes feladatrészekre)**

Jelölések & adatok: $A = 12$, $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{J}$, $m_n = 1{,}67\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $c = 3\cdot10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

- Az ütközés előtt: a neutron sebessége: v_0, az atommag áll.
- Az ütközés után: a neutron sebessége: v, az atommag sebessége V.

Rugalmas ütközést föltételezve teljesül az energia és az impulzus megmaradás:

$$\frac{1}{2}m_n v_0^2 = \frac{1}{2}m_n v^2 + \frac{1}{2}(A\,m_n)V^2 \qquad m_n v_0 = m_n v + (A\,m_n)V \quad \text{[centrális!]}$$

Ahol már kihasználtuk, hogy az atommag tömege a tömegszámmal kifejezve: $M = A\,m_n$.

A lehetséges egyszerűsítések után az alábbi egyenletrendszert kapjuk a sebességekre:

$$\begin{cases} v_0^2 = v^2 + A\,V^2 \\ v_0 = v + A\,V \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 - v = A\,V} \ (*) \end{cases}$$

Az első egyenletet az alábbi trükkel átalakítva:

$$v_0^2 = v^2 + A\,V^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_0^2 - v^2 = A\,V^2 \quad \Leftrightarrow \quad (v_0 - v)(v_0 + v) = A\,V^2$$

Majd a második egyenletet kihasználva:

$$\underbrace{(v_0 - v)}_{A\,V}(v_0 + v) = A\,V^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 + v = V}\ (**)$$

A két bekeretezett elsőfokú egyenletből már könnyen adódik a keresett ütközés utáni neutron sebesség, csak az $(**)$ egyenlet A-szorosából kell kivonnunk a $(*)$ egyenletet:

$$\left.\begin{aligned} A\,v_0 + A\,v &= A\,V \\ v_0 - v &= A\,V \end{aligned}\right\} \boxed{-} \quad \Rightarrow \quad (A-1)v_0 + (A+1)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = -\frac{A-1}{A+1}\,v_0}$$

A kinetikus energia az eredetihez képest a sebesség négyzetek arányában változik, így, valóban

$$E = \frac{1}{2}m_n v^2 = \frac{1}{2}m_n v_0^2\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$$

Tudjuk, hogy $A \geq 1$, így az $E = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\ E_0$ kifejezésben az $\frac{A-1}{A+1}$ pozitív tényező minimumát keressük, ahol:

$$\frac{A-1}{A+1} = \frac{A+1-2}{A+1} = 1 - \frac{2}{A+1}.$$

Tehát a tényező akkor kicsi, ha $\frac{2}{A+1}$ nagy, azaz ha A a lehetőségekhez képest a legkisebb. A hidrogén esetén $A = 1$, tehát az a legkedvezőbb, ha minél több hidrogént tartalmaz az árnyékoló anyag.

Termikus neutron mozgási energiája az ekvipartíció tétele alapján (3 szabadsági fok):

$$E_\mathrm{T} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300 = 6{,}21\cdot 10^{-21}\ \mathrm{J} \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{T} = \frac{6{,}21\cdot 10^{-21}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = \boxed{0{,}04\,\mathrm{eV}}$$

Grafit esetén:

$$\lambda := \frac{A-1}{A+1} = \frac{11}{13}$$

Így n ütközés után az energia, az előzőeket iterálva: $\boxed{E_n = \lambda^{2n}E_0}$, innen az ütközések száma az exponenciális egyenlet megoldásaként adódik:

$$\frac{E_n}{E_0} = \lambda^{2n} \quad \Rightarrow \quad \log_\lambda\left(\frac{E_n}{E_0}\right) = 2n \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\ln\lambda}\,\ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\ln(11/13)}\,\ln\left(\frac{4\cdot 10^{-2}}{3\cdot 10^6}\right) = 54{,}4$$

Tehát ebben az idealizált esetben $\underline{\underline{55}}$ ütközés után lenne a neutron termális.

A klasszikus leírás alátámasztásához azt kell megfontolnunk, hogy mekkora a neutron sebessége a fénysebességhez képest.
A kinetikus energia kifejezése relativisztikusan:

$$E_\mathrm{kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 = \frac{E_\mathrm{kin}}{mc^2} = \frac{3\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{1{,}67\cdot 10^{-27}(3\cdot 10^8)^2} = 0{,}003$$

Tehát

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_\mathrm{kin}}{mc^2}+1\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(0{,}003+1)^2}} = 0{,}08 \quad \Rightarrow \quad v \ll c$$

Megjegyzés: A klasszikus mozgási energia kifejezéssel számolva:

$$E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{1{,}67\cdot 10^{-27}}} = 2{,}38\cdot 10^7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 0{,}08$$

Ez persze nem korrekt, hiszen már tartalmazza azt a föltevést, hogy a neutron jóval lassabban mozog a fénysebességnél. **(ekkor is részpont)**

2. Feladat: Egy dugattyú 25 g-os acél kompressziós gyűrűjének kopási tulajdonságait szeretnék vizsgálni radioaktív nyomkövetéses technológiával. Ehhez a gyűrűt neutron sugárzásnak teszik ki mindaddig, amíg egyenletesen $4 \cdot 10^5$ Bq aktivitást nem mutat a sugárzás hatására keletkező radioaktív ^{59}Fe miatt. Ezt követően a gyűrűt azonnal beépítik a motorba.
A motor 30 napos folyamatos működése után $100\,\mathrm{cm}^3$-nyi mintát vesznek a kenést biztosító motorolajból. A minta vizsgálata során 10 perc alatt 126 bomlást regisztrálnak.
Mekkora része kopott el ennyi idő alatt az acél gyűrűnek, ha a motorolaj teljes térfogata $5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$? Tegyük fel, hogy az összes lekopott fémdarabka belekeveredett az olajos oldatba.
[1 Bq = 1 bomlás / másodperc; ^{59}Fe felezési ideje = 45 nap.]

Megoldás:

Jelölések & adatok: $m = 25\,\mathrm{g} = 0{,}025\,\mathrm{kg}$, $A(0) = 4 \cdot 10^5\,\mathrm{Bq}$, $t = 30\,\mathrm{nap}$, $T_{1/2} = 45\,\mathrm{nap}$, $V_o = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, $V_m = 100\,\mathrm{cm}^3 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$.

A minta aktivitása ($t = 30$ nap után):

$$A_m(t) = \frac{126\text{bomlás}}{10\text{min}} = \frac{126\text{bomlás}}{10 \cdot 60\text{s}} = \frac{21}{100}\,\mathrm{Bq} = 0{,}21\,\mathrm{Bq}$$

A teljes motorolaj mennyiség aktivitása a térfogat arányok alapján ($t = 30$ nap után):

$$A_o(t) = A_m(t)\,\frac{V_o}{V_m} = 0{,}21\,\frac{5 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = 10{,}5\,\mathrm{Bq}$$

Ezt a benne oldott radioaktív részecskék bomlása okozza. Föltételezve, hogy η része kopott el a gyűrűnek (mivel minden lekopott darabka oldatba megy) az olaj aktivitása a teljes aktivitás η része:

$$A_o(t) = \eta A(t)$$

A teljes aktivitás pedig exponenciálisan csökken a kezdetihez képest:

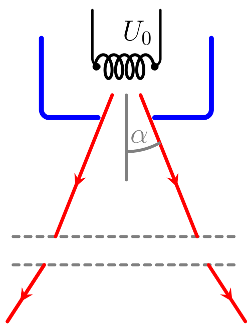
$$A(t) = A(0) \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \qquad \left[A(t) = 4 \cdot 10^5 \cdot 2^{-\frac{30}{45}} = 251984\,\mathrm{Bq}\right]$$

A t időpontbeli teljes aktivitást kifejezve az olaj aktivitásával, már csak az η kopási hányad ismeretlen:

$$\frac{A_o(t)}{\eta} = A(0) \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \eta = \frac{A_o(t)}{A(0)}\,2^{\frac{t}{T_{1/2}}} = \frac{10{,}5}{4 \cdot 10^5}\,2^{\frac{30}{45}} = \underline{\underline{4{,}17 \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-3}\ \%}}$$

Tehát $\underline{\underline{4{,}17 \cdot 10^{-5}}}$ része azaz $\underline{\underline{4 \cdot 10^{-3}\ \%}}$-ka kopott el a gyűrűnek 30 nap alatt.

3. Feladat: Egy vákuumcsőben az izzószálból kilépő elektronok α félnyílásszögű nyalábban hagyják el az U_0 gyorsítófeszültségű anódot. Útjukba állítunk egy fémhálópárt, amelynek hálói között potenciálkülönbség van. Mekkora legyen ez a potenciálkülönbség, hogy a nyaláb nyílásszöge megkétszereződjék?
[$\alpha = 30°$, $U_0 = 10\,000\,\mathrm{V}$, ezek az elektronok még „lassúak”, nem relativisztikusak, nyugodtan használhatunk klasszikus fizikai megfontolásokat.]

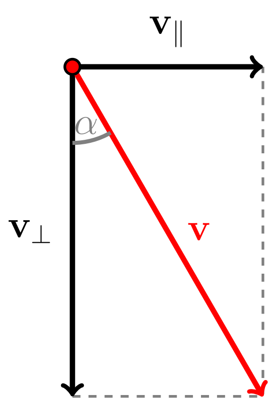


Megoldás:

Jelölések & adatok: $U_0 = 10\,000\,\mathrm{V} = 10^4\,\mathrm{V}, \quad \alpha = 30°, \quad q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}, \quad m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

A nyaláb szélén haladó elektronok sebesség komponensei a hálók közt áthaladás előtt:

$$v_\perp = v \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\,v; \qquad v_\parallel = v \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\,v.$$

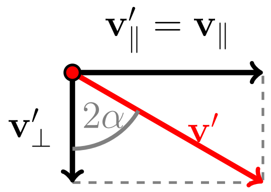


A nyaláb szélén haladó elektronok sebesség komponensei a hálók közt áthaladás után:

$$v'_\perp = v' \cdot \cos(2\alpha) = \frac{1}{2}v'; \qquad v'_\parallel = v' \cdot \sin(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}v'.$$

Mivel a párhuzamos komponens nem változik, a sebesség nagyságok kapcsolata

$$v_\parallel = v'_\parallel \quad \Rightarrow \quad v \cdot \sin\alpha = v' \cdot \sin(2\alpha) \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v\sin\alpha}{\sin(2\alpha)} = \frac{v}{2\cos\alpha} = \frac{v}{\sqrt{3}}.$$



Ahogyan azt az ábrán is rajzoltuk, a szög megváltozását az elektronok merőleges sebesség komponensének csökkenése okozza. Tehát egy a gyorsító feszültséggel ellentétes előjelű feszültség fékezi a hálók közt áthaladó elektronokat. **(10 p idáig)**

Az elektronon végzett munka: $W_{\text{mező}} = q_e U = U[\mathrm{eV}]$

A sebesség csökkenését nyomon követhetjük a munka tétel alapján:

$$E'_{\text{kin}} - E_{\text{kin}} = W_{\text{mező}}$$

A kinetikus energiák arányát a sebesség nagyságokra tett megfontolások alapján ismerjük:

$$\frac{E'_{\text{kin}}}{E_{\text{kin}}} = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Itt kihasználtuk, hogy az elektron „lassú”, azaz érvényes a szokásos $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ összefüggés. (*) Joule helyett elektronvoltban számolva azonnal a helyes eredményt kapjuk, hiszen ekkor az U_0 gyorsítófeszültség éppen U_0 [eV] kinetikus energiát ad az elektronnak:

$$U_0 = 10^4\,\mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{kin}} = 10^4\,\mathrm{eV}\,.$$

A mező által a lassítás során végzett munka:

$$W_{\text{mező}} = \left(\frac{1}{3} - 1\right)E_{\text{kin}} = -\frac{2}{3} \cdot 10^4\,\mathrm{eV} = -6{,}67 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}$$

Tehát az eredeti gyorsító feszültséggel ellentétes előjelű $\underline{\underline{U = 2/3 \cdot 10^4\,\mathrm{V}}}$ nagyságú potenciál különbség lassította az elektronokat.

Esetleg a sebességeket is kiszámítva:

$$U_0 = 10^4\,\mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{kin}} = 10^4\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$$

$$. \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\,E_{\text{kin}}}{m}} = 5{,}93 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad v' = \frac{v}{\sqrt{3}} = 3{,}42 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(*) Megjegyzés: Ez valóban jóval kisebb mint a $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ fénysebesség.

Persze ez az érvelés nem teljesen korrekt, hiszen itt már a klasszikus mechanikai formulát használtuk, ami eleve csak c-hez képest kis sebességekre igaz.

A teljesen korrekt számolás a kinetikus energia relativisztikus kifejezéséből:

$$E_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 = \frac{E_{\text{kin}}}{mc^2} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-15}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}(3 \cdot 10^8)^2} = 0{,}0195$$

Tehát

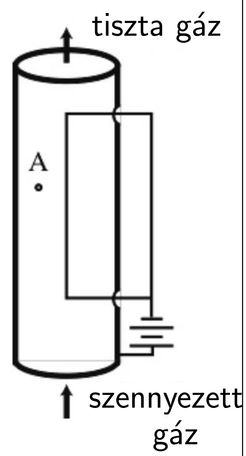
$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(0{,}0195+1)^2}} = 0{,}19 \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}19 \cdot (3 \cdot 10^8) = 5{,}84 \cdot 10^7$$

Az eltérés a klasszikusan számolt sebességtől igen pici, 2%-on belül van.

(plussz pont ha foglalakozik a „lassúság” kérdésével)

4. Feladat: Egyes ipari létesítményekben elektrosztatikus elven működő ülepítő berendezésen engedik keresztül a keletkezett gázokat, így távolítva el a szennyező anyagokat. Egy ilyen berendezés egyszerűsített vázlatrajzát mutatja az ábra, mely egy hosszú vékony vezetődrótból és egy azt körülölelő szintén vezető hengerpalástból áll. A negatív vezeték és a pozitív hengerpalást között nagyjából $5 \cdot 10^4$ V potenciálkülönbség áll fenn.

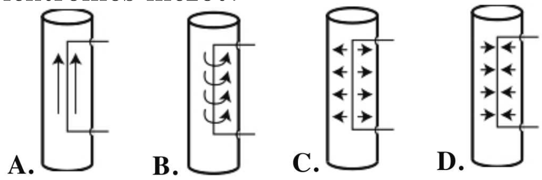
A hengeren belül létrejövő elektromos mező nagysága fordítottan arányos a középső dróttól mért távolsággal. A semleges szennyező részecskéket először magához vonzza a központi vezeték. Az inhomogén elektromos mező a vezeték közelében már elég erős (nagyobb mint $3 \cdot 10^6$ N/C) ahhoz, hogy föllépjen a koronakisülés jelensége. Ennek során (szikrakisülés nélkül) a vezetékről negatív többlet töltés jut át a gáz részecskékre. Az ily módon feltöltődött szennyező részecskéket a hengerpalást magához vonzza, ahonnan miután összegyűltek, eltávolíthatóak.



Egy ilyen berendezés tipikus energiafölvétele 300 J légköbméterenként.

[Az elektron töltése: $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, az A pont a hengeren belül, a berendezés szimmetria tengelyén átmenő síkban van.]

1. Milyen irányba mutat az A pontban lévő nitrogén ionra (Na^+)ható erő?
   A. tengely felé
   B. palást felé
   C. lefelé
   D. fölfelé
2. Milyen irányba mutat az A pontban lévő $C_{10}H_{18}O_2$ molekulára ható erő?
   A. tengely felé
   B. palást felé
   C. lefelé
   D. fölfelé
3. Egy fluor atomból a vezetődrót közvetlen közelében negatív töltésű fluorid ion keletkezik. Adjunk becslést a keletkező fluorid ion (tömege $3 \cdot 10^{-26}$ kg) hengerpalást elérésekor lehetséges maximális kinetikus energiájára?
   A. $8 \cdot 10^{-31}$ J
   B. $1{,}5 \cdot 10^{-23}$ J
   C. 10^{-20} J
   D. $8 \cdot 10^{-15}$ J
4. Hogyan változik a berendezés kapacitása, ha a drót és a hengerpalást közötti potenciálkülönbséget növeljük?
   A. A kapacitás csökken.
   B. A kapacitás nem változik.
   C. A kapacitás nő.
   D. A berendezésben lévő gáz anyagi minőségétől függően a kapacitás nőhet és csökkenhet is
5. 1 másodperc alatt $100\,m^3$ gáz áramlik át az ülepítő hengerén. Mekkora elektromos áram folyik a berendezésben?
   A. 0 A
   B. 10^{-2} A
   C. 0,6 A
   D. $3 \cdot 10^4$ A
6. Az alábbi ábrák közül melyik szemlélteti helyesen a henger belsejében kialakuló elektromos mezőt?



7. A semleges részecskék vonzódnak a vezetődróthoz. Ezzel a folyamattal az alábbi jelenségek közül melyik mutatja a legnagyobb analógiát?
   A. Kicsiny mágnesek a Föld mágneses mezejének megfelelően állnak be.
   B. Egy töltött fésű magához vonzza a kicsiny papírdarabokat.
   C. A klorid ion és a nátrium ion közötti vonzás a sókristályban.
   D. Két nitrogén molekula között kialakuló van der Waals kölcsönhatásból származó vonzás.

Megoldás:

(A 2.-at kivéve mind 3 p, az pedig 2 p. Indoklás nélkül fele pont.)

1. Milyen irányba mutat az A pontban lévő nitrogén ionra (Na^+)ható erő?

   $\boxed{\text{A. tengely felé}}$

   A szöveg alapján a palást pozitív, míg a vezeték negatív töltéstöbbletű. [A negatív többlettöltésű szennyező részecskék vonzódnak a palásthoz.] Így a pozitív töltésű (Na^+) ion a középső vezetődróthoz vonzódik.

2. Milyen irányba mutat az A pontban lévő $C_{10}H_{18}O_2$ molekulára ható erő?

   $\boxed{\text{A. tengely felé}}$

   A molekula semleges, nincs töltéstöbblete. A vezeték irányába vonzódik. (Ez az infó a szövegben is benne van.)

Az ok pedig a polarizáció jelensége. Az elektromos mező nem homogén: szimmetria okokból sugárirányban kifelé mutat és a távolsággal fordítva arányos. Így polarizálja a molekulákat és a „pozitívabb végükkel” a dróthoz vonzza. [Lásd még az utolsó kérdést!]

3. Egy fluor atomból a vezetődrót közvetlen közelében negatív töltésű fluorid ion keletkezik. Adjunk becslést a keletkező fluorid ion (tömege $3 \cdot 10^{-26}$ kg) hengerpalást elérésekor lehetséges maximális kinetikus energiájára?

   D. $8 \cdot 10^{-15}$ J

   A palást és a drót közötti $5 \cdot 10^4$ V potenciálkülönbség gyorsítja az 1-szeresen negatív fluorid iont.

   $$E_{\text{kin}} = 5 \cdot 10^4\,\text{eV} = 5 \cdot 10^4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J} = 8 \cdot 10^{-15}\,\text{J}$$

4. Hogyan változik a berendezés kapacitása, ha a drót és a hengerpalást közötti potenciálkülönbséget növeljük?

   B. A kapacitás nem változik.

   A konstrukció egy hengerkondenzátor, melynek kapacitása a geometriai jellemzőktől függ. Ami nem változik, így a kapacitás sem változik.

   Ha nő a potenciálkülönbség, akkor arányosan nő a dróton, illetve a hengeren elhelyezkedő töltés nagysága, éppen a $C = Q/U =$ állandónak megfelelően.

   (A gáz anyagi minősége persze önmagában befolyásolhatja a kapacitás értékét. A potenciál növelésre azonban nem történik kapacitás változás akármilyen gáz tölti is ki éppen a hengert.)

5. 1 másodperc alatt $100\,\text{m}^3$ gáz áramlik át az ülepítő hengerén. Mekkora elektromos áram folyik a berendezésben?

   C. 0,6 A

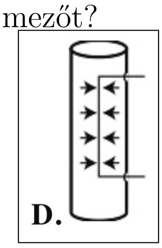
   A szövegben van információ a berendezés megtisztított légköbméterenkénti energiafölvételére: $E/\Delta V = 300\,\text{J}/\text{m}^3$, így a fönti információ birtokában már tudjuk a teljesítményt:

   $$P = \frac{E}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = 300\,\text{J}/\text{m}^3 \cdot 100\,\text{m}^3/\text{s} = 3 \cdot 10^4\,\text{W}$$

   Föltételezve, hogy ez a teljesítmény mind a töltések mozgatására fordítódott

   $$P = U \cdot I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{U} = \frac{3 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^4} = \frac{3}{5} = 0{,}6\,\text{A}$$

6. Az alábbi ábrák közül melyik szemlélteti helyesen a henger belsejében kialakuló elektromos mezőt?

   Az első kérdésnél már megfontoltuk, hogy a palást pozitív, míg a vezeték negatív töltéstöbbletű. Tehát a pozitív próbatöltésre a tengely felé irányuló erő hat. Így az elektromos mező vektorai a tengely felé mutatnak hengerszimmetrikusan.

7. A semleges részecskék vonzódnak a vezetődróthoz. Ezzel a folyamattal az alábbi jelenségek közül melyik mutatja a legnagyobb analógiát?

   B. Egy töltött fésű magához vonzza a kicsiny papírdarabokat.

   A vonzódás oka a polarizáció jelensége. Az elektromos mező nem homogén: szimmetria okokból sugárirányban kifelé mutat és a távolsággal fordítva arányos. Az inhomogén mező polarizálja a semleges molekulákat és a „pozitívabb végükkel” a dróthoz vonzza. Ez az *elektromos megosztás*

D.-ben leírt jelenségével mutat analógiát, ahol a fésű inhomogén tere megosztja a semleges papírdarabokon lévő töltéseket, majd magához-vonzza az ellentétes töltésű felével.

A D. pontban említett van der Waals kölcsönhatásnál többek között a polarizáció is szerepet játszik, de ott az *egyforma, semleges* molekulák *egymást* polarizálják, és nem egy fix külső térrel hatnak kölcsön. [egyforma objektumok egymással vs. egy objektum külső térrel hat kölcsön.]