38. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
Döntő
2019. május 6.
I. kategória: gimnázium 9. évfolyam

1. Egy pilóta egyenletesen gyorsuló mozgással akarja elérni a gép felszállási sebességét. A kifutó-pálya felén már elérte a felszállási sebesség 2/3-át. Elég hosszú-e a kifutópálya a felszálláshoz?

(Holics László, Budapest)

I. megoldás. Az ismert $v=\sqrt{2as}$ összefüggés alapján a pálya *valóságos* hosszát s_{max}-szal jelölve a megadott *tényleges* adatokkal írhatjuk:

$$\left(\frac{2}{3}v\right)^2=2a\frac{s_{\mathbf{max}}}{2}. \tag{1.}$$

A felszálláshoz *igényelt x* pályahosszra érvényes:

$$v^2=2ax. \tag{2.}$$

(1.)-ből: $$v^2=\frac{9}{4}as_{\mathbf{max}}.$$

Innen $$2ax=\frac{9}{4}as_{\mathbf{max}} \quad\rightarrow\quad x=1{,}125\,s_{\mathbf{max}},$$

vagyis a felszálláshoz szükséges pályahossz a tényleges pályahossz 1,125-szöröse, tehát növelni kell a gyorsulást.

II. megoldás. $v_0=0$ kezdősebességű, egyenletesen gyorsuló mozgásról van szó. Érvényesek a következő összefüggések:

$$s=\frac{1}{2}a\cdot t^2 \quad \text{és} \quad t=\frac{v}{a}.$$

A második összefüggésből a t időt az elsőbe helyettesítve és egyszerűsítve az a gyorsulással:

$$s=\frac{v^2}{2a}.$$

A gyorsulás állandósága miatt a megtett út és az elért pillanatnyi sebesség négyzete egyenes arányban változik. A felszállási sebesség és a pálya felén elért sebesség aránya:

$$\frac{v}{\frac{2}{3}v}=\frac{3}{2}.$$

A felszálláshoz szükséges s út $\left(\frac{3}{2}\right)^2$-szer, azaz $\frac{9}{4}$-szer nagyobb az l hosszúságú pálya felénél, $\frac{\ell}{2}$-nél: $$s=\frac{9}{4}\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{9}{8}\ell=1{,}125\ell.$$

A kifutópálya tehát nem elég hosszú. A baleset csak a gyorsulás növelésével kerülhető el.

III. megoldás. A pálya végén elért sebességet jelöljük v_S-sel! Erre érvényes:

$$v_S = \sqrt{2as_{\max}}.$$

A félúton a sebesség a felszállási sebességgel kifejezve:

$$\frac{2}{3}v = \sqrt{2a\frac{s_{\max}}{2}} = \sqrt{as_{\max}}.$$

Négyzetre emelés után:

$$\frac{4}{9}v^2 = as_{\max}, \quad \text{és} \quad v_S^2 = 2as_{\max}.$$

Innen

$$v_S^2 = \frac{8}{9}v^2,$$

azaz a pálya végén elért sebesség a felszállási sebességgel kifejezve:

$$v_S = \frac{\sqrt{8}}{3}v < v,$$

vagyis a pálya végén a repülőgép nem éri el a felszállási sebességet, tehát rövid a pálya.

2. Egy 12 m magas fa tetejéről leesik a termés. 8 m-es magasságban egy kis ágba ütközik, és bár 30 %-nyit veszít a sebességéből, de – mivel letöri az ágat, – folytatni tudja megkezdett pályáját. Mekkora sebességgel ér földet? (A termés súlyos és kicsi, a törés után sebességének iránya nem változik meg..)

(Kirsch Éva, Debrecen)

I. megoldás. Adatok: H = 12 m, h = 8 m, g = 10 m/s^2, $v_{01} = 0$.

A faágig tartó esés útja ($H - h$). Ehhez szükséges idő

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot(12\,\text{m}-8\,\text{m})}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0,8944\,\text{s}.$$

A megszerzett sebesség:

$$v_1 = gt_1 = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0,8944\,\text{s} = 8,944\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ennek 70 %-ával kezdi az esés második szakaszát.

$$v_{02} = 0,7v_1 = 0,7\cdot 8,944\frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,26\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A további 8 m-es út megtételéhez szükséges t_2 idő meghatározása másodfokú egyenlettel:

$$h = v_{02}\cdot t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2.$$

Rendezve:

$$gt_2^2 + 2v_{02}\cdot t_2 - 2h = 0.$$

Ennek megoldása:

$$t_2 = \frac{-2v_{02} \pm \sqrt{(2v_{02})^2 + 8gh}}{2g} = \frac{-2\cdot 6,26\frac{\text{m}}{\text{s}} \pm \sqrt{\left(2\cdot 6,26\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 8\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 8\,\text{m}}}{2\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,785\,\text{s}.$$

(A másik gyök negatív, a feladat szempontjából nem alkalmas adat.) Ezzel a leérkezés sebessége:

$$v_2 = v_{02} + gt_2 = 6,26\frac{\text{m}}{\text{s}} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0,785\,\text{s} = \mathbf{14,11\frac{m}{s}}.$$

II. megoldás másodfokú egyenlet nélkül (felhasználva az I. megoldás adatait):

A második esés kezdősebessége, a v_{02} = 6,26 m/s sebesség, ami 0 kezdősebességű szabadeséssel t' = 0,626 s esési idő alatt lenne elérhető.
Ez idő alatt a test úgy mozog, mintha

$$h' = \frac{1}{2}gt'^2 = \frac{1}{2}10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}0,626^2\,\mathrm{s}^2 = 1,96\,\mathrm{m}\text{ -ről}$$

esett volna. A mozgás második szakasza tehát úgy tekinthető, mint $H' = h + h'$ = 9,96 m-es magasságból való szabadesés. Az ehhez tartozó idő:

$$t = \sqrt{\frac{2H'}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9,96\,\mathrm{m}}{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 1,411\,\mathrm{s}.$$

Az ez alatt elért sebesség pedig

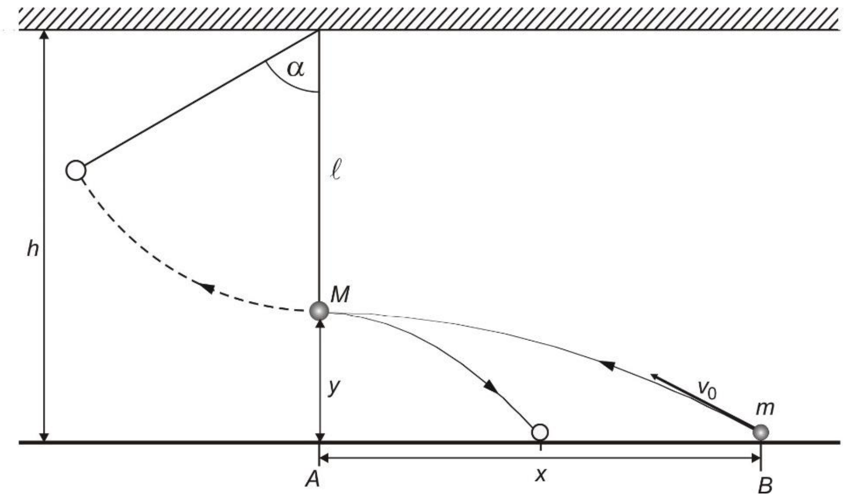
$$v_{02} = gt = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1,411\,\mathrm{s.} = \mathbf{14,11\frac{m}{s}}.$$

3. A h = 3,75 m magas terem mennyezetére l = 2,5 m hosszú fonalat erősítettünk, ennek alsó végére M tömegű kisméretű golyót kötöttünk. A felfüggesztési pont alatti A ponttól x távolságra levő B pontból megfelelő irányú és nagyságú sebességgel indított m tömegű pontszerűnek tekinthető testtel ütköztettük úgy, hogy ütközéskor m sebessége vízszintes lett. Az ütközés centrális és tökéletesen rugalmas volt. A visszapattanó test az A ponttól 0,5x távolságban érkezett a padlóra. A fonál legnagyobb kitérése φ = 60° volt. (A közegellenállás elhanyagolható.)

a) Mekkora az M / m arány?

b) Mekkora x értéke?

c) Mekkora nagyságú sebességgel indítottuk el az m tömegű testet?



(Suhajda János, Kiskőrös)

Megoldás. Adatok: h = 3,75 m, l = 2,5 m, α = 60°. Kérdések: M/m = ? x = ? v_0 = ?

a) Jelöljük az m tömegű test ütközés utáni sebességét U-val, az m tömegűét u-val!
A fonálon függő golyó mozgási energiája a helyzeti energiának növelésével egyenlő:

$$\frac{1}{2}MU^2 = Mg\Delta h, \qquad (1.)$$

ahol a 60°-os szögkitérés miatt

$$\Delta h = \frac{l}{2} = \frac{2,5\,\mathrm{m}}{2} = 1,25\,\mathrm{m}. \qquad (2)$$

(1.) és (2.)-ből:

$$U = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1,25\,\mathrm{m}} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Jelöljük a v_0 kezdősebességgel elhajított test sebességét pályája legmagasabb pontján v_1-gyel, visszapattanás utáni sebességét u-val! Az m tömegű test oda-vissza pályaszakaszainak x irányú vetületére felírható:

$$x = v_1 t, \quad \text{és} \quad 0,5x = ut,$$

ugyanis a ferde hajítás emelkedési és esési t ideje azonos. Innen abszolút értékben:

$$u = 0,5v_1. \qquad (3.)$$

Az m tömegű test két mozgásszakaszának időtartama

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot(h-l)}{g}} = \sqrt{\frac{2(3,75\,\mathrm{m} - 2,5\,\mathrm{m})}{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0,5\,\mathrm{s}.$$

A rugalmas ütközésre felírható a lendület- és az energia-megmaradás törvénye:

$$mv_1 = MU - mu, \qquad (4.)$$

és

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}mu^2. \qquad (5.)$$

(4)-ben (3.) alapján az u helyett írható:

$$mv_1 = MU - m\cdot 0,5v_1.$$

Ezt rendezve kapjuk:

$$U = 1,5\frac{m}{M}v_1. \qquad (6.)$$

(5.)-ben U behelyettesítésével:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}M\left(1,5\frac{m}{M}v_1\right)^2 + \frac{1}{2}mu^2 \;\rightarrow\; v_1^2 = \frac{M}{m}\left(1,5\frac{m}{M}v_1\right)^2 + \left(0,5v_1\right)^2 \;\rightarrow\; 0,75 = 2,25\frac{m}{M}.$$

Rendezve a tömegarányra kapjuk:

$$\frac{M}{m} = \frac{2,25}{0,75} = \mathbf{3.} \qquad (7.)$$

b) Használjuk fel a (3.), (6.) és (7.) eredményünket! (3.) beírása (6.)-ba:

$$U = 1,5\frac{m}{M}v_1 = 1,5\frac{m}{M}\frac{u}{0,5} = 3\frac{m}{M}u,$$

(7.) figyelembe vételével a sebességek abszolút értékére kapjuk:

$$U = 3\frac{1}{3}u \;\rightarrow\; U = u,$$

tehát u = 5 m/s.

Mivel v_1 a hajítás v_0 kezdősebességének x komponense. Ezért (3.)-ból v_1 = 10 m/s felhasználásával a keresett x távolságra

$$x = v_1 t = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}0,5\,\mathrm{s} = \mathbf{5\,m}$$

érték adódik.

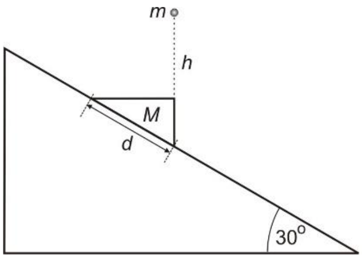
c) A hajítás kezdősebességének *y* komponense:

$$v_{0y} = gt = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}5\,\mathrm{s} = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Így a keresett kezdősebesség nagysága:

$$v_0 = \sqrt{v_{0y}^2 + v_1^2} = \sqrt{5^2 + 10^2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathbf{11{,}18\,\frac{m}{s}},$$

azaz az *m* tömegű testet 11,18 m/s kezdősebességgel indítottuk.



4. Az ábrán látható elrendezésben a rögzített lejtőn az *M* tömegű ék súrlódás nélkül csúszhat. A *m* tömegű golyó *h* magasságból az ék szélére esik, amely az ütközés pillanatában indul el. Az *m* tömeg sokkal kisebb, mint az *M*. Az ütközés tökéletesen rugalmas.

(Az ék hossza *d* = 32 cm, l. az ábrát!.)

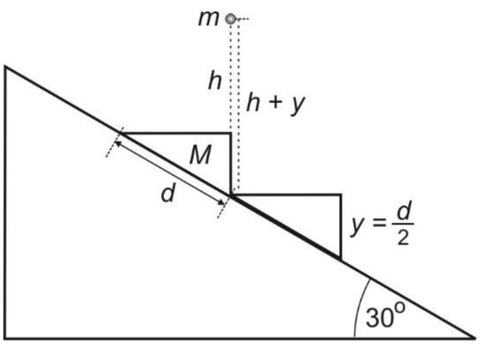
a) Legfeljebb milyen *h* magasságból indulhat az *m* tömegű test, hogy visszapattanás után még egyszer ütközzön a lecsúszó ékkel?

b) Hogyan aránylik a második ütközés előtti sebesség nagysága az első ütközés előtti sebességnagysághoz?

(Dr. Kiss Miklós, Gyöngyös)

Megoldás: *a)* A „legfeljebb" feltétel arra utal, hogy a golyó visszaesve még éppen elérje a lecsúszó ék másik szélét. A *h* magasságról leeső test $v = \sqrt{2gh}$ sebességgel érkezik az ékhez.

Az $m \ll M$ feltétel miatt az *m* tömegű test ugyanakkora sebességgel pattan vissza az *M* tömegű még éppen álló ékről amekkorával érkezett.



Miközben a kis test megtesz *h* távolságot felfelé, majd *h* + *y* távolságot lefelé, az éknek *y*-nal kell lejjebb kerülnie, hogy a visszaeső golyó még egyszer elérje.

(*y* az ék függőleges oldalának hossza.) Az ezekhez szükséges idő a szabadesés úttörvényéből:

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2,$$

ebből az *emelkedés* ideje (ami az esés idejével azonos)

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{1}$$

illetve az *esés* ideje a másodszori ütközésig a négyzetes úttörvényből:

$$h + y = \frac{1}{2}gt_2^2 \quad \rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2(h+y)}{g}}.$$

Felhasználva az $y = d/2$ összefüggést, a feladatnak ezt az adatát behozva írhatjuk:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2\left(h + \frac{d}{2}\right)}{g}} = \sqrt{\frac{2h + d}{g}}. \qquad (2)$$

Meg kell határoznunk, hogy a lecsúszó ék mennyi idő alatt mozdul el annyira, hogy a visszaérkező golyó még éppen elérje a szélét.

A lecsúszó ék gyorsulása g-nek a lejtőre merőleges vetülete, ami a 30º-os szög miatt $g/2$.

Ezzel a gyorsulással éppen d hosszú utat kell megtennie az éknek. T-vel jelölve az ék csúszás-idejét, szintén a négyzetes úttörvényből:

$$d = \frac{1}{2} a T^2 \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{4d}{g}}.$$

Ennek az időnek kell egyenlőnek lennie a visszapattanó golyó emelkedési és esési idejének összegével:

$$T = t_1 + t_2.$$

(1) (2) és (3) felhasználásával

$$\sqrt{\frac{4d}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{2h + d}{g}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{4d} = \sqrt{2h} + \sqrt{2h + d}.$$

Már csak a keresett h egyetlen ismeretlen van az egyenletben.
Négyzetre emelés után:

$$4d = 2h + 2\sqrt{2h} \cdot \sqrt{2h + d} + 2h + d = 4h + d + 2\sqrt{2h(2h + d)}.$$

Átalakítások után megkapjuk a keresett ejtési magasságot:

$$4d = 4h + d + 4\sqrt{h\left(h + \frac{d}{2}\right)},$$

$$3d - 4h = 4\sqrt{h\left(h + \frac{d}{2}\right)},$$

$$\frac{3}{4} d - h = \sqrt{h\left(h + \frac{d}{2}\right)},$$

négyzetre emelés után:

$$\frac{9}{16} d^2 - \frac{6}{4} dh + h^2 = h^2 + \frac{1}{2} dh.$$

Innen

$$\frac{9}{16} d^2 - \frac{6}{4} dh = +\frac{2}{4} dh \quad \rightarrow \quad \frac{9}{16} d^2 = \frac{8}{4} dh.$$

Végül:

$$\frac{9}{16} d = \frac{32}{16} h \quad \rightarrow \quad h = \frac{9}{32} d = \frac{9}{32} \cdot 32\,\mathrm{cm} = \mathbf{9\,cm.}$$

Tehát a lecsúszó ék *d* hosszának 9/32 része magasságból kell elejteni a testet.

b) Az érkezési sebesség nagysága:

$$v' = \sqrt{2g\left(h+y\right)} = \sqrt{2g\left(h+\frac{d}{2}\right)} = \sqrt{2g\left(\frac{9}{32}d+\frac{16}{32}d\right)} = \frac{5}{4}\sqrt{gd}.$$

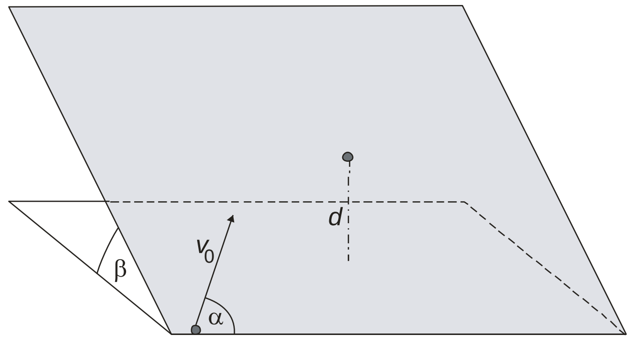
A második ütközés előtti sebesség nagysága és az első ütközés előtti sebesség aránya:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{gd}}{\sqrt{2gh}} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{gd}}{\sqrt{2g\frac{9}{32}d}} = \mathbf{\frac{5}{3}}.$$

Tehát a keresett arány 5:3.

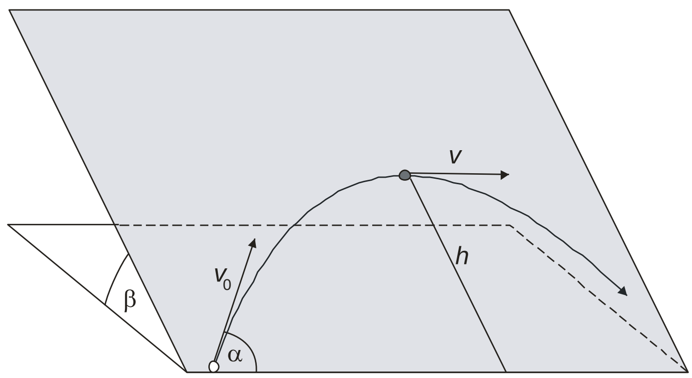
38. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny
Döntő
2019. május 6.
III. kategória:két tanítási nyelvű szakgimnázium 9. évfolyam és a többi szakgimnázium 10. évfolyam

1. Vízszintes talajjal $\beta = 30^o$-os szögben hajló, elhanyagolható súrlódású lejtőn a talajszinttől $v_0 = 4$ m/s nagyságú, a lejtő és a talaj metszésvonalával $\alpha = 60^o$-os szöget bezáró sebességgel ellöktünk egy kisméretű korongot.
a) Maximálisan mekkora d távolságra kerül a korong talajtól?
b) Mennyi idő telt el ezalatt?



(Holics László, Budapest)

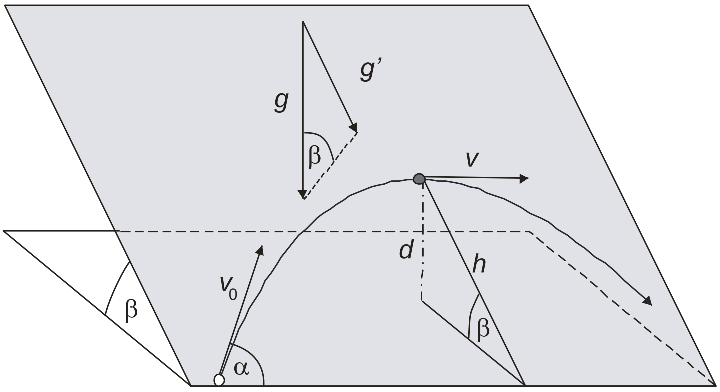
I, Megoldás. *a)* A korong mozgása hasonlít a ferde hajítással eldobott test mozgásához, azzal a különbséggel, hogy pályája nem függőleges, hanem ferde síkban helyezkedik el (1. ábra.).

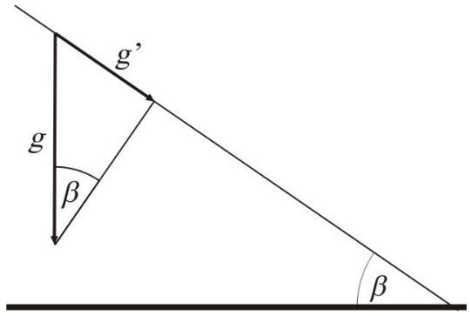


1. ábra

A feladat kérdése nem követeli meg a ferde hajítás leírásának részletes ismeretét, ui. csak olyan kérdést tesz fel, ami megválaszolható e nélkül is.

Vegyük észre, hogy a súrlódásmentes kényszerfelület az önmagára merőleges nyomóerővel nem befolyásolja a *felület menti* mozgást! Azt csak a nehézségi erő szabja meg, de csak a kényszerfelülettel párhuzamos komponense! Így a korong mozgása olyan, mintha szabadon elhajtották volna egy g' gyorsulású nehézségi erőtérben, amely a teljes g gyorsulás vektorának a kényszerfelületre merőleges vetülete (vagyis a kényszerfelülettel párhuzamos komponense, 2. a és 2. b ábra).

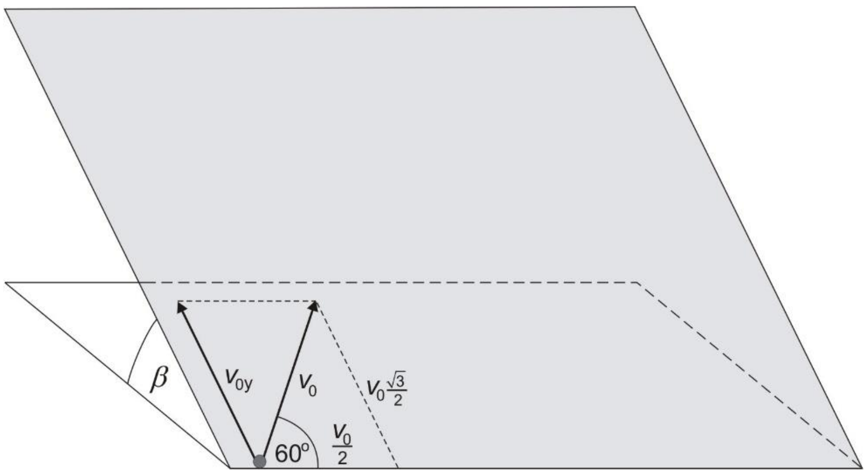




2.a ábra 2.b ábra

Ennek a komponensnek a nagysága a 2.a és 2.b (oldalnézeti) ábra szerint $g' = \frac{g}{2}$.

Mivel a feladat a mozgás térbeli viszonyai közül csak a talaj feletti *d* távolságot kérdezi, nem kell törődni a vízszintes irányú elmozdulással. Ezért csak a lejtőn felfelé mutató v_{0y} kezdősebesség-komponensre van szükségünk.



3. ábra

Ezek nagysága a 3. ábra alapján a speciális, 60º-os háromszög tulajdonságai miatt (Pitagorasz-tétellel) kapható meg:

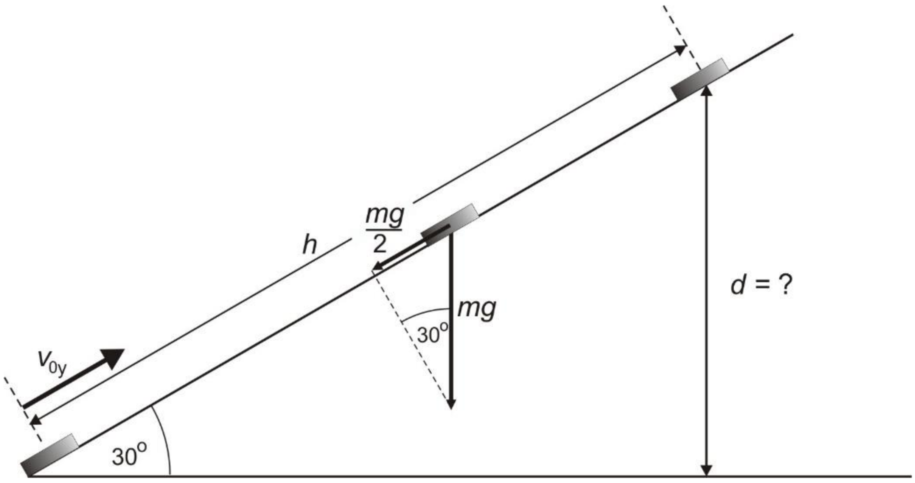
$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \quad \rightarrow \quad v_{0y}^2 = v_0^2 - v_{0x}^2 = v_0^2 - \frac{v_0^2}{4} = \frac{3}{4} v_0^2,$$

ahonnan a korong mozgásának a keresett, *y* irányú sebességkomponense

$$v_{0y} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0.$$

Innen már a ferde síkon felfelé ellökött test maximális magasságának meghatározására egyszerűsödik a megoldás. Ezt az oldalnézeti 4. ábra szemlélteti:

:



4. ábra

A lejtőn való felcsúszás nagysága a *g*' gyorsulású nehézségi erőtérben függőlegesen feldobott test emelkedési magasságának megfelelő érték:

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g''} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\right)^2}{2\frac{g}{2}} = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g}.$$

Ugyancsak a 4. ábra alapján a korongnak az alapsíktól elért maximális távolsága *h* /2, azaz a keresett érték:

$$d = \frac{h}{2} = \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{g} = \frac{3\cdot\left(4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2}{8\cdot 10\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{0{,}6m.}$$

b) Az eltelt idő a függőleges hajításhoz hasonlóan számolható *g*' = *g*/2 gyorsulással:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g'}} = \sqrt{\frac{4d}{\frac{g}{2}}} = \sqrt{\frac{8d}{g}} = \sqrt{\frac{8\cdot 0{,}6\,\mathrm{m}}{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \mathbf{0{,}693\,s}.$$

II. Megoldás.

a) A munkatételt alkalmazva a fenti ábra értelmében

$$-mg'h = -mgd = 0 - \frac{1}{2}mv_{0y}^2,$$

ahol *d* az alapsíktól mért keresett maximális távolság, és $v_{0y} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0$ az erő irányában történő sebességváltozás. Ezzel:

$$d = \frac{1}{2g}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\right)^2 = \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{g} = \frac{3\cdot\left(4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2}{8\cdot 10\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{0{,}6m.}$$

A *b)* kérdésre adott válasz azonos az I, megoldásbelivel.

III. Megoldás. Ugyancsak a munkatétellel, az *eredeti teljes* sebességgel számolva. A testen végzett munkák összege egyenlő a mozgási energia megváltozásával:

$$\sum W = \Delta E_{\mathbf{kin}}.$$

Csak a nehézségi erő végez munkát. Ezzel:

$$-mgd = \frac{1}{2}mv_{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

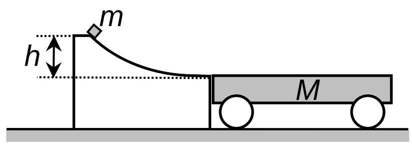
ahol v_x a korong sebessége a legmagasabb pontban, ami vízszintes, és $v_{\mathbf{x}} = \frac{v_0}{2}$ nagyságú. Ezzel:

$$-2gd = \frac{v_0^2}{4} - v_0^2,$$

ahonnan a keresett magasság

$$d = \frac{v_0^2 - \frac{v_0^2}{4}}{2g} = \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{g} = \frac{3\cdot\left(4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2}{8\cdot 10\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{0,6m.}$$

2. Egy pontszerű, m tömegű test, álló helyzetből indulva, súrlódásmentesen lecsúszik a h magasságú, vízszintesben végződő görbe lejtőről, és rácsúszik az M = 3m tömegű, kezdetben álló, de könnyen gördülő kocsira. A kocsin $s = 2h$ utat megtéve a kocsihoz képest megáll.



Határozzuk meg a test és kocsi közötti súrlódási együttható nagyságát!

(Kotek László, Pécs)

Megoldás:

Legyen az m tömegű test sebessége a leérkezés pillanatában v_0, a kocsival azonos sebességük pedig v_1!

Az energia-megmaradásból a leérkezésig:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

innen a rácsúszás kezdősebessége

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

A lendület-megmaradásból:

$$mv_0 = (m + M)v_1,$$

ahonnan a közös végsebesség

$$v_1 = \frac{m}{m+M}v_0 = \frac{v_0}{4}.$$

A testek mozgását a súrlódási erők befolyásolják. A súrlódási erő a *kocsin*

$$W_+ = \mu mgl$$

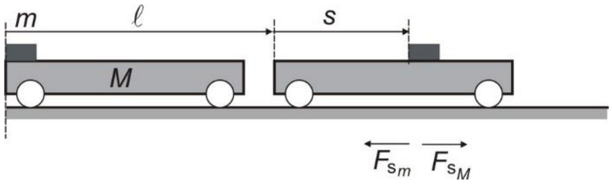
pozitív, a *rá csúszó testen*

$$W_- = -\mu mg(l+s)$$

munkát végez, ahol l a kocsi elmozdulása a közös sebesség eléréséig, s a kis test útja a kocsihoz viszonyítva. Így a két súrlódási erő a test-kocsi rendszeren összesen

$$\sum W = \mu mgl - \mu mg(l+s) = -\mu mgs$$

munkát végzett (l. az ábrát!).



A munkatétel felhasználásával:

$$\frac{1}{2}(m+M)\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -\mu mgs,$$

Felhasználva a közös sebesség kifejezését és a feladat adatait:

$$\frac{1}{2}\cdot 4m\cdot\frac{\upsilon_0^2}{16} - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -\mu mgs,$$

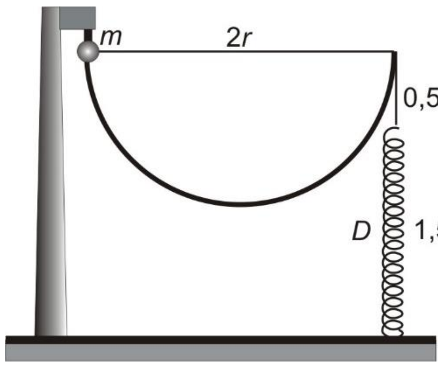
$$\frac{3}{4}\upsilon_0^2 = 2\mu gs,$$

$$\mu = \frac{3}{4}\cdot\frac{\upsilon_0^2}{2gs},$$

vagyis a súrlódási együttható nagysága:

$$\mu = \frac{3}{8}\cdot\frac{2gh}{2gh} = \frac{3}{8} = \mathbf{0,375.}$$

3. Az ábrán látható r = 10 cm sugarú, félkör alakú merev drót úgy van függőleges síkban rögzítve, hogy az átmérője vízszintes. A drótra egy sima felületű, gömb alakú, pontszerűnek tekinthető, m = 0,2 kg tömegű lyukas golyó van felfűzve. A testhez egy (abszolút hajlékony), 2,5 r hosszúságú fonál van erősítve, amely a félkör jobb oldali szélén levő kicsiny bemélyedésen van átvetve, s ez a vége egy függőleges helyzetű rugóhoz csatlakozik. A D = 75 N/m direkciós erejű rugó erőmentes állapotában r hosszúságú. Kezdetben a félkör bal szélén levő testet nulla sebességgel elengedjük.



a) Mekkora lesz a test legnagyobb sebessége?

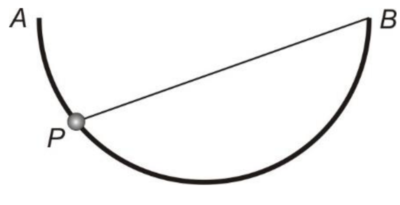
b) Mekkora erővel terheli ekkor a test a drótot?

c) Indulás után hol áll meg a test?

(A súrlódás mindenhol elhanyagolható, g = 9,81 m/s^2.)

(Zsigri Ferenc, Budapest)

Megoldás. *a)* Ebben a folyamatban csak konzervatív erők hatnak, így a mechanikai energia megmarad. A helyzeti- és a rugóenergia csökkenése egy darabig növeli a golyó mozgási energiáját. A helyzeti energia csökkenése a félkör alakú pálya alján a legnagyobb, a rugalmas energia már előbb zérusra csökkent, tehát a test legnagyobb sebességét a pálya legalsó pontján éri el.



A rugóenergia akkor válik zérussá, amikor a rugó hossza ismét r, azaz nyújtatlan. Ez valóban bekövetkezik a legmélyebb pont elérése előtt, ugyanis miközben a kis golyó A pontból közelít B pont felé (A pillanatnyi helyzetét az ábrán P pont jelzi), a PB fonalszakasz egyre rövidebb lesz. Legalul

$$PB = r\sqrt{2},$$

tehát a rövidülés

$$AB - PB = 2r - r\sqrt{2} = r\left(2-\sqrt{2}\right) = 0,586r > 0,5r.$$

A rugó 0,5r-rel történő összehúzódása után r hosszúságúvá válik, tehát nem húzza tovább a fonalat, az meglazul.

Mivel a helyzeti energia csökkenése legalsó pont eléréséig a legnagyobb (és ettől kezdve a rugalmas energia már mindenhol zérus), ezért a munkatétel alapján:

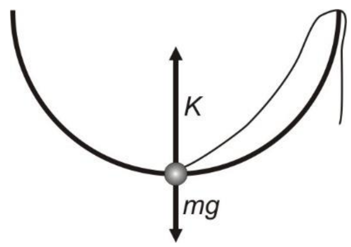
$$mgr + \frac{1}{2}D\left(0,5r\right)^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2,$$

ebből a maximális sebesség:

$$v_{\max} = \sqrt{2gr + \frac{D\left(0,5r\right)^2}{m}},$$

numerikusan:

$$v_{\max} = \sqrt{2\cdot 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0,1\mathrm{m} + \frac{75\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\left(0,5\cdot 0,1\mathrm{m}\right)^2}{0,2\,\mathrm{kg}}} = 1,703\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{1,7\frac{m}{s}}.$$



b) Legyen ebben a pontban a pálya által kifejtett erő K, ami a súrlódás hiánya miatt függőlegesen felfelé mutat. A kölcsönhatás törvénye szerint ekkora nagyságú, és ezzel ellentétes irányú erővel terheli a golyó a drótot.

A mozgásegyenlet alapján:

$$K - mg = ma_{\mathrm{cp}}$$

és a centripetális gyorsulás:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v_{\max}^2}{r} = \frac{\left(1,7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0,1\mathrm{m}} = 28,9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 29\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

a keresett nyomóerő

$$K = m\left(g + a_{\mathrm{cp}}\right) = 0,2\,\mathrm{kg}\left(9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 29\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \mathbf{7,762\,N.}$$

Így tehát a golyó 7,762 N nagyságú, lefelé mutató irányú erővel terheli a drótpályát, amikor a sebessége maximális.

c) Amikor a golyó eljut a pálya B végpontjába, mivel a legalsó ponttól kezdve már a rugó nyújtatlan, a golyó ottani mozgási energiáját, így a sebességét *csak a rugó energiacsökkenése* szolgáltatta, hiszen ugyanolyan magasra került, mint ahonnan elindult, így a nehézségi erő összmunkája A-tól B-ig 0 volt. A golyó függőleges irányban lerepül, vagy inkább „felrepül” a drótról (annak sima felületéről a huzal lecsúszik, így nem akadályozza a drótpálya elhagyásában).

Ha továbbra sem feszül meg a fonál, akkor a golyó helyzeti energiájának növekedése megegyezik a rugó energia csökkenésével, vagyis

$$mgh = \frac{1}{2}D\left(0,5r\right)^2,$$

ahonnan a golyó a B pont felett

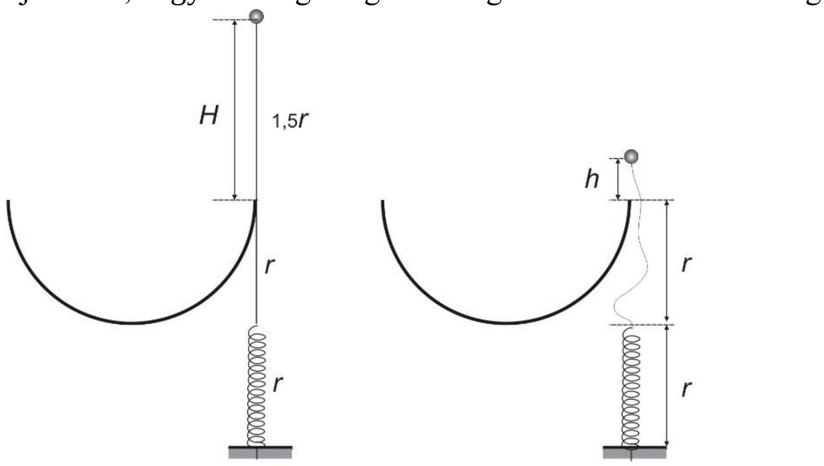
$$h=\frac{D(0,5r)^2}{2mg}=\frac{Dr^2}{8mg}=\frac{75\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot 0,1^2\,\text{m}^2}{8\cdot 0,2\,\text{kg}\cdot 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}=0,04778\,\text{m}\approx \mathbf{4,8\,cm}$$

magasságra jut a golyó.

Az ábra alapján látható, hogy a rugó nyújtatlan állapota esetén a golyó legfeljebb

$$H=1,5r=15\,\text{cm}>h$$

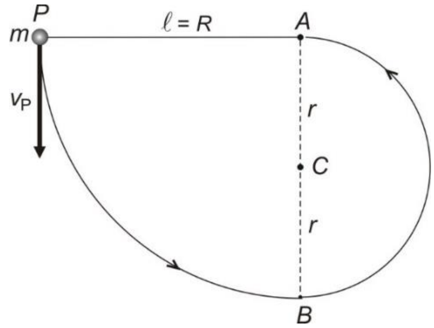
magasságra is eljuthatna, vagyis h magasság eléréséig valóban nem feszül meg a rugó.



H az a magasság, amíg a rugó megnyúlása nélkül emelkedhetne a kis golyó

h amíg valójában emelkedik, tehát nem nyúlik meg a rugó

4. Egy függőleges fal valamely *A* pontjában kiálló szegre egy hajlékony és nyújthatatlan *l* hosszúságú fonál végére erősített kisméretű, *m* tömegű testet felfüggesztünk. Ezután a testet a függőleges sík mellett kimozdítjuk úgy, hogy szál feszített és vízszintes helyzetű legyen. Az *A* és *B* ponton átmenő függőleges egyenes *AB* szakaszának *C* felezőpontjában egy másik szeget helyezünk el. Ha ezután a testet elengedjük, az először az *R* sugarú negyed köríven mozog, majd hirtelen vált és az $r = R/2$ sugarú körön folytatja mozgását felfelé.



a) Legalább mekkora v_P függőleges irányú kezdősebességgel kell indítanunk a fonál végén lévő testet, hogy az nekiütközzön *A* jelű pontban levő szegnek?

b) Mekkora erő rántja meg a testet abban a pillanatban, amikor az *R* sugarú körpályáról a *r* sugarú pályára tér?

Adatok: m = 0,5 kg, l = 1,8 m.

(Wiedemann László)

Megoldás. *a)* A test a *PBA* görbe vonalú pályán jut el *A*-ba. A kérdés arra vonatkozik, hogy mekkora az a *legkisebb* sebesség, amivel indítanunk kell a testet. Ez azt jelenti, hogy a mozgás során a fonálnak mindig feszesnek kell lennie, kivéve a legfelső pontba, ahol nullára csökkenhet, hiszen a test már a célpontba ért.

A dinamikai egyenlet az *A* pontra általánosan felírva:

$$mg+K_\text{A}=ma_\text{cp}=m\frac{v_A^2}{r}. \tag{1}$$

A test még éppen eléri az *A* pontot, ha a fonálerő csak ott válik zérussá, vagyis az *A* pontban K_A = 0.

(1)-ből következik, hogy az *A*-ba legalább

$$v_A = \sqrt{gr} = \sqrt{\frac{l}{2}g}$$

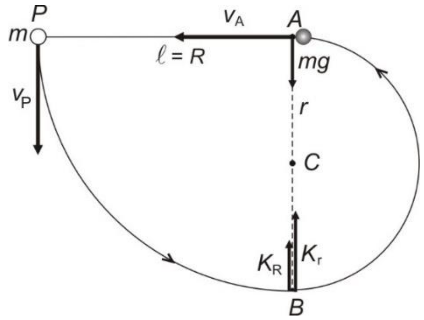
sebességgel kell érkeznie. Mivel a kiinduló- és a véghelyzet azonos magasságban van, a helyzeti energia a két helyen azonos, az energia megmaradás alapján a kiinduló mozgási energia az érkezésivel azonos kell legyen, tehát a kezdősebesség és az *A* pont elérési sebessége azonos, vagyis az indítási sebességnek is

$$v_P = v_A = \sqrt{\frac{l}{2}g} = \sqrt{\frac{1{,}8\,\mathrm{m}}{2}10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{3\frac{m}{s}}$$

sebességnek kell lennie.

b) A körpályák sugarának hirtelen váltása a *B* pontban történik, azaz a test az *R* sugarú pályáról $r = R/2 = l/2$ sugarúra tér át. A fonalat megrántó erő a fonalakat terhelő erők különbsége:

$$\Delta K = K_r - K_R.$$



A *B* pont *R* sugarú oldalán az erőtörvény:

$$K_R - mg = m\frac{v_B^2}{R} \quad \rightarrow \quad K_R = m\frac{v_B^2}{R} + mg,$$

a *B* pont *r* sugarú oldalán pedig

$$K_r - mg = m\frac{v_B^2}{r} \quad \rightarrow \quad K_r = m\frac{v_B^2}{r} + mg.$$

A fonál „megrántásának” megfelelő erő e kettő különbsége:

$$\Delta K = K_r - K_R = m\frac{v_B^2}{r} + mg - \left(m\frac{v_B^2}{R} + mg\right) = mv_B^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \tag{2}$$

A *B* pontbeli sebességnégyzetet az energiatételből kapjuk:

$$mgR + \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}mv_B^2,$$

ahonnan

$$v_B^2 = 2gR + v_P^2 = 2gR + \frac{R}{2}g = \frac{5}{2}gR. \tag{3}$$

(3)-at (2)-be írva, és rendezve:

$$\Delta K = m\frac{5}{2}gR\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = m\frac{5}{2}gR\frac{R-r}{Rr} = m\frac{5}{2}gR\frac{R-\frac{R}{2}}{R\frac{R}{2}} = \frac{5}{2}mg.$$

Beírva az adatokat a fonalat megrántó erő:

$$\Delta K = \frac{5}{2}0{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathbf{12{,}5\,N.}$$