2019. évi Mikola 2. forduló megoldásai:
I. kategória, 9. gimnázium

1)
Megoldás:

a)
Az eldobás, illetve elindulás pillanatától eltelt idő legyen *t*. Az 1 index az eldobott testre, a 2 index a vízszintesen gyorsuló testre vonatkozik.
A vízszintesen megtett útjuk:

$$x_1 = v_0 \cdot t \text{, illetve } x_2 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 .$$

Ha ugyanazon a függőleges egyenesen vannak, akkor $x_1 = x_2$, amiből

$$v_0 = \frac{1}{2} at . \qquad (1)$$

A sebességük:

$$v_1 = \sqrt{(v_0)^2 + (gt)^2} \text{, illetve } v_2 = a \cdot t .$$

A két sebesség egyenlőségéből: $(at)^2 = v_0^2 + (gt)^2$.

Felhasználva (1)-et

$$(at)^2 = \frac{1}{4}(at)^2 + (gt)^2 ,$$

amiből t^2-tel való egyszerűsítés, rendezés és négyzetgyökvonás után kapjuk, hogy

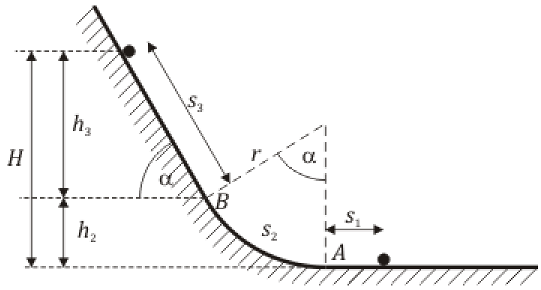
$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} g = \frac{2\sqrt{3}}{3} g \approx 11,55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

Tehát a torony aljáról induló test gyorsulása a nehézségi gyorsulás $\frac{2\sqrt{3}}{3}$-szorosa, közelítőleg **11,55 m/s²**.

b)
A gyorsulás értékéből és (1) felhasználásával az esési idő $t = \frac{\sqrt{3} \cdot v_0}{g} \approx 2,77 \text{ s}$.

Akkor lehetnek egy helyen, ha a dobott test a másik tartózkodási helyén éri el a talajszintet. A fenti idő alatt $h = \frac{1}{2} g t^2 \approx 38,4 \text{ m}$-t esik az eldobott test. A torony kb. **38,4 m** magas.

2)
Megoldás:



a)
Alkalmazzuk a testre a mechanikai energia-megmaradás törvényét:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_B^2 .$$

Felhasználva az ábra alapján, hogy $h_2 = R\cdot\left(1-\cos 60^\circ\right) = 0,5\cdot R = 40\ \mathrm{m}$, adódik a test sebessége a B pontban: $v_B = 10\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Az A és B pontokban változik a kényszererő ugrásszerűen.

Az A pont előtt:

$$K_\mathrm{A} = mg .$$

Az A pont után közvetlenül már a köríven:

$$K_\mathrm{A}^* - mg = m\frac{v_\mathrm{A}^2}{R} .$$

A fentiek alapján a kényszererő változása az A pontban:

$$\Delta K_\mathrm{A} = K_\mathrm{A}^* - K_\mathrm{A} = m\cdot\frac{v_\mathrm{A}^2}{R} = 11,25\ \mathrm{N} .$$

A B ponton, a köríven:

$$K_\mathrm{B}^* - mg\cos\alpha = m\frac{v_\mathrm{B}^2}{R} ,$$

$$K_\mathrm{B}^* = m(\frac{v_\mathrm{B}^2}{r} + gcos\alpha) = 6,25\ \mathrm{N} .$$

A B ponton, az emelkedőn:

$$K_\mathrm{B} = mg\cos\alpha .$$

A fentiek alapján a kényszererő változása az B pontban:

$$\Delta K_\mathrm{B} = K_B - K_B^* = -m\cdot\frac{v_\mathrm{B}^2}{R} = -1,25\ \mathrm{N} .$$

A test teljes emelkedése a lejtőn:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mgH \;\rightarrow\; H = \frac{v_A^2}{2g} = 45\ \mathrm{m} .$$

b)

A 45 méter emelkedésből 40 méter a köríven történik, 5 méter a lejtőn.

A vízszintes szakaszon megtett út: $s_1 = v_A t = 30$ m.

A körív hossza: $s_2 = \frac{1}{6} \cdot 2R\pi = 83,73\, m$.

A lejtőn megtett út: $s_3 = \frac{h_3}{\sin\alpha} = 5,77$ m.

A test által megtett út: $s = s_1 + s_2 + s_3 = 30\text{ m} + 83,73\text{ m} + 5,77\text{ m} = 119,5\text{ m}$

3)

Megoldás:

A lejtő alakja egy szabályos háromszög fele, ezért a hossza kétszerese a magasságának. Tehát amikor a függőlegesen mozgó test földet ér, akkor a lejtőn lévő test a lejtő közepénél van. A fonál ekkor meglazul.

A feltétel alapján a test ugyanakkora úton fékeződik le az elért sebességről, mint amekkora úton ezt a sebességet elérte. Mivel állandó erők hatnak, a gyorsulások is állandók, tehát a sebesség növekedésekor ugyanakkora a test gyorsulásának nagysága, mint fékeződéskor.

Az első szakaszban a mozgásegyenletek a mozgás irányú összetevőkkel:

$$K - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \qquad (1)$$

$$Mg - K = Ma \qquad (2)$$

K a kötélerő, *a* a sebesség irányú gyorsulás nagysága.

A két egyenlet összeadása után:

$$Mg - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = (m + M) \cdot a. \qquad (3)$$

Fékeződéskor: $$mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = ma \qquad (4)$$

(4)-ből kifejezzük a-t és (3)-ba helyettesítjük:

$$Mg - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + Mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

$M = 4m$ beírása után *mg*-vel egyszerűsíthetünk:

$$4 - sin\alpha - \mu cos\alpha = sin\alpha + \mu cos\alpha + 4(sin\alpha + \mu cos\alpha).$$

Rendezést követően: $4 - 6\sin\alpha = 6\mu\cos\alpha$.

A $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ és a $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ behelyettesítése után:

$$\mu = \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0{,}192 \approx 0{,}2\,.$$

Megjegyzés: A feladatot megoldhatjuk munkatétellel (vagy hívhatjuk akár energia-megmaradásnak) is. Legyen a lejtő magassága h, továbbá használjuk ki, hogy $M = 4m$, illetve azt is, hogy a W súrlódási munka (súrlódási hő) az első szakaszra ugyanakkora, mint a másodikra. A két szakaszra ezt a két energiás egyenletet írhatjuk fel:

$$4mgh = mg\frac{h}{2} + \frac{1}{2}5mv^2 + W$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{h}{2} + W.$$

A második egyenletet behelyettesíthetjük az elsőbe:

$$4mgh = mg\frac{h}{2} + 5\left(mg\frac{h}{2} + W\right) + W,$$

így a súrlódási hőt meghatározhatjuk, továbbá a szokásos módon is felírhatjuk:

$$W = \frac{mgh}{6} = (\mu mg\cos\alpha)\cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mu mgh\,,$$

amiből $\mu = \frac{\sqrt{3}}{9} = 0{,}192 \approx 0{,}2.$

4)

Megoldás:

a)

A test $v_0 = \sqrt{2gH} = 2\ \mathrm{m/s}$ sebességgel érkezik a kiskocsi elejére. A platón való mozgása során a pici test lassulni fog a következő gyorsulással:

$$a = \frac{F_s}{m} = \frac{\mu_1 \cdot mg}{m} = \mu_1 g = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

A kiskocsi a következő gyorsulással kezd el mozogni:

$$A = \frac{F_{s1} - F_{s2}}{M} = \frac{\mu_1 mg - \mu_2 6mg}{5m} = \frac{\mu_1 - 6\mu_2}{5}\cdot g = 0{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

A filmfelvétel 0,4 másodperce alatt a test pont a plató L hosszával több utat tesz meg, mint a kocsi. A testek mozgására a következő egyenlet írható fel:

$$v_0 t_0 - \frac{a}{2}t_0^2 = L + \frac{A}{2}t_0^2\,.$$

Innen a kiskocsi platójának L hossza könnyen kifejezhető:

$$L = v_0 t_0 - \frac{a + A}{2}t_0^2 = 0{,}464\ \mathrm{m} = 46{,}4\ \mathrm{cm}\,.$$

b)

A kis test sebessége: $v = v_0 - a \cdot t_0 = 0,4\ \text{m/s}$.

A kiskocsi sebessége: $V = A \cdot t_0 = 0,08\ \text{m/s}$.

c)

A kis testre ható súrlódási erő munkája:

$$W_1 = -(\mu_1 mg) \cdot \left(v_0 t_0 - \frac{a}{2} t_0^2 \right) = -384\ \text{mJ} .$$

A munkatétellel is megadhatjuk a választ:

$$W_1 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(v^2 - v_0^2 \right) = -384\ \text{mJ} .$$

A kocsira ható súrlódási erő munkája:

$$W_2 = (\mu_1 mg) \cdot \left(\frac{A}{2} t_0^2 \right) = +12,8\ \text{mJ} .$$

A kocsira ható gördülési ellenállás munkája:

$$W_3 = -(\mu_2 6mg) \cdot \left(\frac{A}{2} t_0^2 \right) = -9,6\ \text{mJ} .$$

Ellenőrzésként most is alkalmazható a munkatétel:

$$W_2 + W_3 = \frac{1}{2} 5 m V^2 - 0 = +3,2\ \text{mJ} .$$

II. kategória, 10. gimnázium

1)
Megoldás:

A vízszint emelkedése 60-as beosztástól a 78-as beosztásig történt, tehát a kiszorított víz, valamint az ónhenger térfogata 18 cm^3. Az ónhenger tömege sűrűségéből és térfogatából számítható:

$$m_{\text{henger}} = \rho V = 5{,}704\ \text{g/cm}^3 \cdot 18\ \text{cm}^3 = 102{,}672\ \text{g}.$$

A henger súlya $m \cdot g$ = 0,102672 kg · 10 N/kg = 1,02672 N.
Az erőmérő 0,8 N erőt mutat, így a felhajtóerő és az erőmérő erejének összege egyenlő a henger súlyával, ahonnan a felhajtóerő:

$$F_{\text{felh.}} + F_{\text{erőmérő}} = mg,$$

vagyis a folyadék felhajtóereje, vagyis a kiszorított folyadék súlya:

$$F_{\text{felh.}} = 1{,}02672\ \text{N} - 0{,}8\ \text{N} = 0{,}22672\ \text{N}.$$

Innen a kiszorított folyadék tömege: $m_{\text{foly}} = F_{\text{felh.}}/g$ = 0,022672 kg = 22,672 g.
A folyadék sűrűsége a tömegének és térfogatának hányadosa:

$$\rho_{\text{foly.}} = m_{\text{foly.}}/V = 22{,}672\ \text{g}/18\ \text{cm}^3 = 1{,}2595\ \text{g/cm}^3 = 1260\ \text{kg/m}^3\ .$$

(Valószínűleg glicerin volt a hengerben.)

2)
Megoldás:
A lejtő alakja egy szabályos háromszög fele, ezért a hossza kétszerese a magasságának. Tehát amikor a függőlegesen mozgó test földet ér, akkor a lejtőn lévő test a lejtő közepénél van. A fonál ekkor meglazul.
A feltétel alapján a test ugyanakkora úton fékeződik le az elért sebességről, mint amekkora úton ezt a sebességet elérte. Mivel állandó erők hatnak, a gyorsulások is állandók, tehát a sebesség növekedésekor ugyanakkora a test gyorsulásának nagysága, mint fékeződéskor.
Az első szakaszban a mozgásegyenletek a mozgás irányú összetevőkkel:

$$K - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \qquad (1)$$

$$Mg - K = Ma \qquad (2)$$

K a kötélerő, a a sebesség irányú gyorsulás nagysága.

A két egyenlet összeadása után:

$$Mg - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = (m+M)\cdot a. \qquad (3)$$

Fékeződéskor: $mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = ma$ (4)

(4)-ből kifejezzük a-t és (3)-ba helyettesítjük:

$$Mg - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha) + Mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

$M = 4m$ beírása után mg-vel egyszerűsíthetünk:

$$4 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha = \sin\alpha + \mu\cos\alpha + 4(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Rendezést követően: $4 - 6\sin\alpha = 6\mu\cos\alpha$.

A $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ és a $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ behelyettesítése után:

$$\mu = \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0{,}192 \approx 0{,}2\,.$$

Megjegyzés: A feladatot megoldhatjuk munkatétellel (vagy hívhatjuk akár energia-megmaradásnak) is. Legyen a lejtő magassága h, továbbá használjuk ki, hogy $M = 4m$, illetve azt is, hogy a W súrlódási munka (súrlódási hő) az első szakaszra ugyanakkora, mint a másodikra. A két szakaszra ezt a két energiás egyenletet írhatjuk fel:

$$4mgh = mg\frac{h}{2} + \frac{1}{2}5mv^2 + W$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{h}{2} + W.$$

A második egyenletet behelyettesíthetjük az elsőbe:

$$4mgh = mg\frac{h}{2} + 5\left(mg\frac{h}{2} + W\right) + W,$$

így a súrlódási hőt meghatározhatjuk, továbbá a szokásos módon is felírhatjuk:

$$W = \frac{mgh}{6} = (\mu mg\cos\alpha)\cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu mgh\,,$$

amiből $\mu = \frac{\sqrt{3}}{9} = 0{,}192 \approx 0{,}2$.

3)

Megoldás:

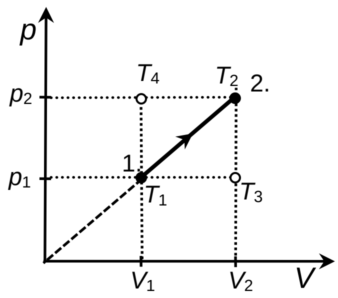
a)

Legyen az arányossági tényező b! $T = b\cdot p^2$. Az állapotegyenletből:

$$pV = nR \cdot bp^2,$$

$$p = \frac{1}{nRb} \cdot V = aV.$$

Ábrázoljuk a folyamatot p –V diagramon!



b)

Vegyük észre, hogy az origón átmenő egyenes a p –V diagramon azt jelenti, hogy a nyomás és a térfogat egyenesen arányosak egymással. Mivel a hőmérséklet a pV szorzattal arányos, és a feladat szerint a hőmérséklet 300 K-ről 1200 K-re nő, vagyis megnégyszereződik, ez csak úgy lehetséges, ha a nyomás is a duplájára, a térfogat is a duplájára növekszik. Ennek segítségével már fel is írhatjuk a végzett munkát (mint 3 kis háromszög területét):

$$W^* = 3 \cdot \frac{p_1 V_1}{2} = 3 \cdot \frac{nRT_1}{2} = 2244{,}8 \text{ J} \approx 2250 \text{ J}.$$

c) A belső energia változása:

$$E_2 - E_1 = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1).$$

A keresett arány: $\boxed{\frac{E_2 - E_1}{W^*} = 3}$.

4)

Megoldás:

a)

Mivel mind a két lap szabadon esik, mindegyiknél a gravitációs erő az erők eredője (a vízszintes helyzet nem szükséges). Tehát:

$$E_+ \cdot Q_- = D \cdot x,$$

$$\frac{Q}{2\varepsilon_0 A} \cdot Q_- = D \cdot x.$$

Amikor a talajon vannak: $\frac{Q}{2\varepsilon_0 A} \cdot Q_- + mg = D \cdot 2x$.

A két egyenletből: $x=\frac{mg}{D}=4\cdot 10^{-3}\ \text{m}$, $Q=\sqrt{mg2\varepsilon_0 A}\approx \pm 3\cdot 10^{-7}\ \text{C}$.

b)

A megemelkedés feltétele:

$$2mg-Dy-\frac{Q}{2\varepsilon_0 A}Q_-=0\,,$$

ahol y a rugó maximális megnyúlása.

Felhasználva, hogy: $\frac{Q}{2\varepsilon_0 A}\cdot Q_-=m\cdot g$, így $Dy=mg$, tehát $y=\frac{mg}{D}=4\cdot 10^{-3}\ \text{m}$.

Felírva a munkatételt az m tömegű lap emelkedésére: $\sum W=\Delta E_{\text{kin.}}$,

$$-\frac{Q}{2\varepsilon_0 A}\cdot Q_-\cdot\left(x^*+y\right)-m\,g\left(y+x^*\right)\ +\frac{1}{2}Dx^{*2}-\frac{1}{2}Dy^2=0\,,$$

ahol x^* a rugó minimális összenyomódása.

Felhasználva, hogy: $\frac{Q}{2\varepsilon_0 A}\cdot Q_-=m\cdot g$, és $y=\frac{mg}{D}$,

$$\frac{1}{2}Dx^{*2}-2mgx^*-5\frac{(mg)^2}{2D}=0\,,$$

$$x^*=\frac{2mg\pm\sqrt{4(mg)^2+5(mg)^2}}{D}\,,$$

$$x^*=\frac{5mg}{D}=2\cdot 10^{-2}\ \text{m}=2\ \text{cm}.$$

Mivel az egyensúlyi helyzetben a rugó összenyomódása $2x$ = 8 mm. Ez azt jelenti, hogy egyensúlyi helyzetéből 12 mm-rel kell a rugót összenyomni.

III. kategória, 10. szakgimnázium

1)
Megoldás:

a)
Az eldobás, illetve elindulás pillanatától eltelt idő legyen *t*. Az 1 index az eldobott testre, a 2 index a vízszintesen gyorsuló testre vonatkozik.
A vízszintesen megtett útjuk:

$$x_1 = v_0 \cdot t \text{, illetve } x_2 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 .$$

Ha ugyanazon a függőleges egyenesen vannak, akkor $x_1 = x_2$, amiből

$$v_0 = \frac{1}{2} at . \qquad (1)$$

A sebességük:

$$v_1 = \sqrt{(v_0)^2 + (gt)^2} \text{, illetve } v_2 = a \cdot t .$$

A két sebesség egyenlőségéből: $(at)^2 = v_0^2 + (gt)^2$.

Felhasználva (1)-et

$$(at)^2 = \frac{1}{4}(at)^2 + (gt)^2 ,$$

amiből t^2-tel való egyszerűsítés, rendezés és négyzetgyökvonás után kapjuk, hogy

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} g = \frac{2\sqrt{3}}{3} g \approx 11,55 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

Tehát a torony aljáról induló test gyorsulása a nehézségi gyorsulás $\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$-szorosa, közelítőleg **11,55 m/s²**.

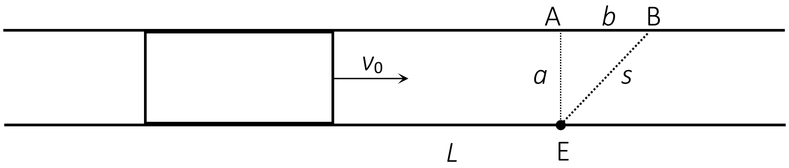
b)
A gyorsulás értékéből és (1) felhasználásával az esési idő $t = \frac{\sqrt{3} \cdot v_0}{g} \approx 2,77 \text{ s}$.

Akkor lehetnek egy helyen, ha a dobott test a másik tartózkodási helyén éri el a talajszintet. A fenti idő alatt $h = \frac{1}{2} g t^2 \approx 38,4 \text{ m}$-t esik az eldobott test. A torony kb. **38,4 m** magas.

2)

Megoldás:

Adatok: L = 8 m, v_0 = 5,5 m/s, a = 4 m, b = 3 m.



a)

Az ember nem érhet később a szemközti A pontba, mint a kotrógép:

$$\frac{a}{v_A} \leq \frac{L}{v_0}.$$

Az ehhez szükséges sebesség: $v_A \geq v_0 \frac{a}{L} = \mathbf{2,75\ \frac{m}{s}}.$

b)

A feltétel ugyanaz, mint az előző esetben, de a megtett utak megváltoztak, ezért:

$$\frac{s}{v_B} \leq \frac{L+b}{v_0},$$

$$v_B \geq v_0 \frac{s}{L+b} = v_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{L+b} = \mathbf{2,5\ \frac{m}{s}}.$$

Vegyük észre, hogy az ütközés elkerüléséhez szükséges legkisebb sebesség csökkent, tehát nem az útra merőleges futásirány a legkedvezőbb!

3)

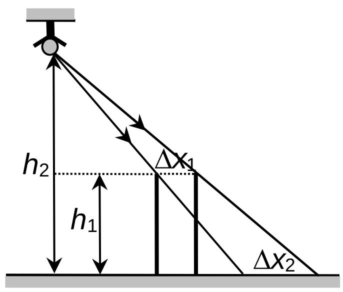
Megoldás:

a)

Modellezzük a mozgó embert egy h_1 magasságú függőleges szakasszal! Mozduljon el az ember a vízszintes felületen Δt idő alatt a Δx_1-gyel, az árnyék pedig Δx_2-vel!

Az ember sebessége: $v_0 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t}$,

az árnyék sebessége: $v_á = \frac{\Delta x_2}{\Delta t}$.



Ezekből: $v_á = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} v_0$.

A háromszögek hasonlóságából: $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{h_2}{h_2 - h_1}$,

$$\boxed{v_á = \frac{h_2}{h_2 - h_1} v_0 = 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.}$$

b)

Amikor a sétáló közeledik a lámpához, az árnyéka másodpercenként 0,9 méterrel csökken (+0,6 - 1,5 = -0,9). Amikor a sétáló távolodik a lámpától, az árnyéka másodpercenként 0,9 méterrel nő.

c)

Az az ember árnyékának hossza az idő függvényében $l = vt = \left(0{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t$.

4)

Megoldás:
Felírjuk a munkatételt a talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből külön a csúszó testre és külön a ládára. Jelöljük *x*-szel a láda, *y*-nal a test ládán megtett útját:

a)

$$\sum W = \Delta E_{\mathrm{mozg.}},$$

$$-S\cdot(x+y) = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{k}}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2, \qquad (1)$$

$$S\cdot x = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{k}}^2 - 0. \qquad (2)$$

A v_{k} közös sebességet a lendület-megmaradás törvény alkalmazásával kaphatjuk meg:

$$m\cdot v_0 = (M+m)\cdot v_{\mathrm{k}},$$

$$v_k = \frac{m}{M+m}\cdot v_0 = \frac{15}{8}\,\mathrm{m}$$

A csúszó testet lassító, a ládát gyorsító súrlódási erő:

$$S = \mu m g \qquad (3)$$

Az (1) és (2) egyenleteket adjuk össze, majd használjuk fel a (3) és (4) egyenleteket, megkapjuk a testnek a ládán megtett útját:

$$y = \frac{M}{M+m}\cdot\frac{v_0^2}{2\mu g} \approx 3{,}9\ \mathrm{m}.$$

b)

A csúszás ideje alatt a láda által megtett utat megkapjuk a (2) egyenletből:

$$x = \frac{Mv_{\mathrm{k}}^2}{2m\mu g} \approx 1{,}46\ \mathrm{m}.$$

A csúszás idejét a következő módon kapjuk:

$$t = \frac{v_0 - v_{\mathrm{k}}}{a} = \frac{v_0 - v_{\mathrm{k}}}{\mu\cdot g} \approx 1{,}56\ \mathrm{s}.$$

IV. kategória, 11. szakgimnázium

1)

Megoldás:

A vízbe merülő hasáb tömege:

$$m = \rho_{\text{víz}} \cdot V_{\text{test}} = 9{,}6 \text{ kg}.$$

A teljesen vízbe merülő hasábra ható felhajtóerő:

$$F_{\text{fel}} = V \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot g = 160 \text{ N}.$$

A teher tömege, amikor felülről terheljük:

$$m_1 = \frac{F_{\text{fel}} - mg}{g} = 6{,}4 \text{ kg}.$$

Amikor alulról terheljük a hasábot, akkor a teher tömege:

$$m_2 = m_1 + \Delta m = 7{,}34 \text{ kg}.$$

Most a hasáb és a teherre ható teljes felhajtóerő:

$$F_{\text{fel}}^* = \left(m + m_2\right) \cdot g = 169{,}4 \text{ N}.$$

Határozzuk meg a teher térfogatát:

$$V_{\text{teher}} = \frac{F_{\text{fel}}^*}{\rho_{\text{víz}} \cdot g} - V = 0{,}00094 \text{ m}^3$$

A teher sűrűsége:

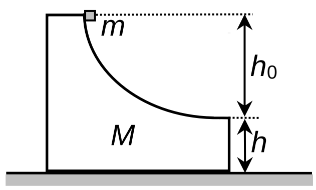
$$\rho = \frac{m_2}{V_{\text{test}}} = \frac{7{,}34 \text{ kg}}{0{,}00094 \text{ m}^3} \approx 7809 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

A teher vas lehet.

2)

Megoldás:

A rögzített esetben hagyja el a test a hasábot υ_0 sebességgel, és a vízszintes hajítás ideje legyen t_0! Könnyű belátni, hogy a hajítás ideje a második esetben is ugyanennyi lesz.



Az energia-megmaradásból:

$$\upsilon_0 = \sqrt{2gh_0}.$$

A vízszintes irányba megtett út:

$$s_1 = \sqrt{2gh_0} \cdot t_0.$$

A második esetben a lendület és energia-megmaradásból:

$$0 = m\upsilon - Mu,$$

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2.$$

Ezekből bevezetve az $x = \frac{m}{M}$ jelölést:

$$v = \sqrt{\frac{2gh_0}{1+x}},$$

$$u = xv.$$

A testek távolsága a talajra esés pillanatában:

$$s_2 = (v + xv)t_0.$$

A feltétel szerint:

$$\sqrt{\frac{2gh_0}{1+x}}(1+x)t_0 = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{2gh_0} \cdot t_0,$$

$$x = \frac{m}{M} = \frac{9}{16}, \qquad \boxed{m = xM = 0{,}18\ \text{kg.}}$$

3)

Megoldás:

a)
Addig folyik ki a csapon a higany, amíg a felette lévő levegő és a higany együttes nyomása 1 atm nem lesz. A higany feletti gázra felírhatjuk a Boyle–Mariotte-törvényt. Jelölje Δl a higanyszint csökkenését a tartályban, és használjuk ki, hogy kezdetben a higany hidrosztatikai nyomása $p_0 = h_0 + L = 76$ Hgcm. Így a következő két egyenletet írhatjuk fel:

$$p_0 l_0 = p(l_0 + \Delta l) \qquad \to \qquad 76 \cdot 38 = p \cdot (38 + \Delta l)$$

$$p + [p_0 - (\rho g)\Delta l] = p_0 \qquad \to \qquad p + [76 - \Delta l] = 76 \qquad \to \qquad \Delta l = p\,.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $p = 38$ Hgcm és $\Delta l = 38$ cm. Tehát a higanyszint 38 cm-rel csökken.

Megjegyzés: Erre az eredményre akár fejben is ráhibázhatunk, hiszen ha a tartályban lévő levegő magassága a duplájára nő, akkor a nyomása a felére csökken (0,5 atm = 38 Hgcm), illetve a higany 38 Hgcm-es nyomáscsökkenése is 0,5 atm = 38 Hgcm nagyságú hidrosztatikai nyomásra vezet. Tehát a levegő és a higany nyomása együtt 1 atm nyomást ad ki.

A hengerben a dugattyú felett lévő higany (az azonos keresztmetszet miatt) 38 Hgcm-es nyomásnövekedést okoz. Újra használhatjuk a Boyle–Mariotte-törvényt a jó hővezetés miatti állandó hőmérséklet miatt:

$$p_1 y_0 = (p_1 + p)(y_0 - \Delta y) \quad \rightarrow \quad 95 \cdot 70 = (95 + 38)(60 - \Delta y)$$
$$\rightarrow \quad \Delta y = \mathbf{10\ cm}.$$

Tehát a dugattyú 10 cm-rel mozdul el lefelé.

b)

A levegő tágulása (ΔV = $A\Delta y$ = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3-es térfogat-növekedése) állandó nyomás mellett következik be, tehát a hőközlés:

$$Q = C_p n \Delta T = \frac{7}{5} R n \Delta T = \frac{7}{5} p \Delta V = \frac{7}{5}\left(\frac{95 + 38}{76} \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\right)(10^{-3}\ \mathrm{m^3}) = 245\ \mathrm{J}.$$

Ez csak a levegővel közölt hő, a fűtőszál ennek tízszeresét kell, hogy adja, ami 2450 J. Ezt az energiamennyiséget a fűtőszál $\frac{2450\ \mathrm{J}}{25\ \mathrm{W}} = \mathbf{98\ s}$ alatt szolgáltatja.

4)
Megoldás:

a)

Kezdetben (v_0 = 0) a fonálban ébredő erő: $mg = K_0 + E \cdot Q \rightarrow EQ = \frac{3}{4} mg$.

A v sebességgel elindított test körmozgást végez:

$$\sum F = m \cdot a_{\mathrm{cp}} ,$$

$$K - mg + EQ = m \frac{v^2}{l} .$$

A feladat alapján $\left(K = 2K_0\right)$:

$$2K_0 - mg + EQ = m\frac{v^2}{l} ,$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} mg - mg + \frac{3}{4} mg = m \frac{v^2}{l} ,$$

$$\frac{1}{4} mg = m \frac{v^2}{l} .$$

A keresett sebesség: $v = \frac{1}{2}\sqrt{gl} = 1\,\mathrm{m/s}$.

b)

Alkalmazzuk a munkatételt: $\sum W = \Delta E_{\mathrm{mozg.}}$,

$$\left(-mg + EQ\right) \cdot h = 0 - \frac{1}{2} m v^2 ,$$

$$\frac{1}{4} mgl\left(1 - \cos\alpha\right) = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Az egyenletet rendezve, megoldva:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{2v^2}{gl} = 0,5 \;\rightarrow\; \alpha = 60^\circ .$$

c)

Ekkor a kötélerő nagysága:

$$K_2 = \left(mg - EQ\right) \cdot \cos\alpha = \left(mg - \frac{3}{4} mg\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} mg (= \frac{1}{2} K_0) .$$

d)

Ekkor a testnek csak tangenciális (érintő irányú) gyorsulása van:

$$m \cdot a_{\mathrm{t}} = \frac{1}{4} mg \cdot \sin\alpha ,$$

$$a = a_{\mathrm{t}} = \frac{1}{4} g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot g \approx 2,16 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} .$$