36. Mikola Sándor fizikaverseny 2017 Döntő
Gyöngyös, 9. évfolyam

Gimnázium

Megoldások

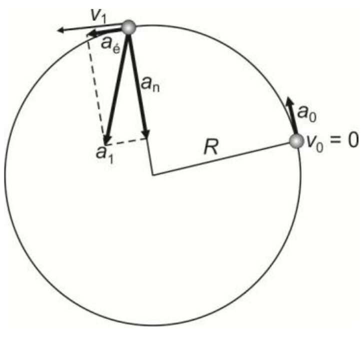
1) Álló helyzetből induló anyagi pont egyenletesen növekvő sebességgel körpályán halad. Kezdőgyorsulása a_0 = 2 m/s^2. Indulás után t = 2 s múlva gyorsulása a_1 = 6 m/s^2 lett. Mekkora a körpálya sugara?

(Holics László, Budapest)

Megoldás. Adatok: $a_0 = a_é$ = 2 m/s^2 = áll., a_1 = 6 m/s^2, t = 2 s. R = ?

A körpályán haladó anyagi pont gyorsulása az érintőleges és a sugárirányú (normál-) gyorsulásvektorok összege. Nagysága:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\ .$$



Ebből az a_n normál (centripetális) gyorsulás v_1^2/R, ahol a pillanatnyi sebesség — az álló helyzetből való indulás miatt — $v_1 = a_0\,t$. Ezt beírva az eredő gyorsulás képletébe a következőt kapjuk:

$$a_1 = \sqrt{a_é^2 + \left(\frac{(a_é t)^2}{R}\right)^2} = a_é \cdot \sqrt{1 + \frac{a_é^2 t^4}{R^2}}.$$

A két oldal négyzetét véve és átrendezve:

$$\frac{a_1^2}{a_é^2} - 1 = \frac{a_é^2 t^4}{R^2}.$$

Kis átalakítással:

$$\frac{a_1^2 - a_é^2}{a_é^4} R^2 = t^4.$$

Innen a pályasugár már kifejezhető:

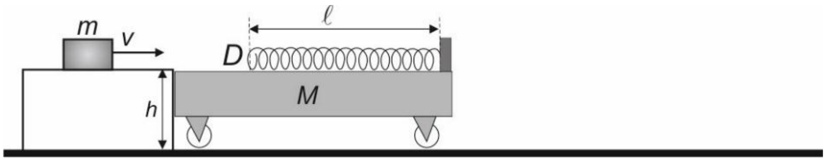
$$R = \sqrt{\frac{a_é^4 t^4}{a_1^2 - a_é^2}} = \frac{a_é^2 t^2}{\sqrt{a_1^2 - a_é^2}} = \frac{4\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4} \cdot 4\ \mathrm{s}^2}{\sqrt{36\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4} - 4\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}}} = 2{,}828\ \mathrm{m} \approx \mathbf{2{,}83\,m.}$$

2) Egy nyugvó, M = 1,5 kg tömegű, könnyen gördülő, h = 0,2 m magas kiskocsira v = 5 m/s sebességgel rácsúszik egy m = 1 kg tömegű test, és a kocsin elhelyezett D = 64 N/m direkciós erejű, elhanyagolható tömegű csavarrugónak szalad. A rugó nyújtatlan hossza ℓ = 80 cm.

a) Mekkora lesz a mozgás során a rugó legrövidebb hossza?

b) Mekkora lesz a két test közötti távolság, amikor a kis test a kocsiról leesve a talajra ér?

(Minden súrlódás elhanyagolható.)



(Holics László, Budapest)

Megoldás. *a)* A rugó akkor a legrövidebb, amikor a kis test és a kocsi azonos sebességgel mozog, ami éppen a rendszer tömegközéppontjának a sebessége:

$$v_{\mathrm{Tkp}} = \frac{mv+0}{m+M} = \frac{1\ \mathrm{kg}\cdot 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1\ \mathrm{kg}+1,5\ \mathrm{kg}} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A mechanikai energia megmaradása alapján írható:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+M)v_{\mathrm{Tkp}}^2 + \frac{1}{2}D(\Delta l_{\max})^2 \quad \to \quad mv^2 - \frac{(mv)^2}{m+M} = D(\Delta l_{\max})^2 \quad \to$$

$$\to \quad \frac{mv^2(m+M)-(mv)^2}{m+M} = D(\Delta l_{\max})^2 \quad \to \quad \frac{mM}{m+M}v^2 = D(\Delta l_{\max})^2,$$

ahonnan a rugó maximális deformációja:

$$\Delta l_{\max} = v\sqrt{\frac{mM}{m+M}\frac{1}{D}} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{1\ \mathrm{kg}\cdot 1,5\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{kg}+1,5\ \mathrm{kg}}\cdot\frac{1}{64\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 0,484\ \mathrm{m},$$

ahonnan a rugó legrövidebb hossza:

$$l_{\min} = l - \Delta l_{\max} = 0,8\ \mathrm{m} - 0,484\ \mathrm{m} = \mathbf{0,316\,m.}$$

b) A rugó ismét kinyúlik, és lelöki a kis testet. Nem kell törődnünk az időbeli lefolyással, ui. az abszolút rugalmas kölcsönhatás végeredménye független a kölcsönhatás időtartamától, vagyis úgy tekinthetjük, mint két test abszolút rugalmas, pillanatszerű ütközését, csak időben elhúzva, vagyis alkalmazhatjuk a rugalmas ütközés törvényeit a két test végsebességének kiszámításához.

A függvénytáblázatból vett összefüggések* alapján, amelyben szerepkő k „ütközési szám” éppen 1:

$$u_{\mathrm{m}} = 2\frac{mv+0}{m+M} - v = 2\frac{1\ \mathrm{kg}\cdot 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1\ \mathrm{kg}+1,5\ \mathrm{kg}} - 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

és

$$u_{\mathrm{M}} = 2\frac{mv+0}{m+M} - 0 = 2\frac{1\ \mathrm{kg}\cdot 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1\ \mathrm{kg}+1,5\ \mathrm{kg}} = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ekkora sebességekkel haladnak a talajhoz viszonyítva: a kis test csúszik hátra a kocsin, a kocsi halad előre. Amikor a kis test elérte a kocsi szélét, onnan leesik és

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2\ \mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0,2\ \mathrm{s}$$

idő alatt ér talajt. Ezalatt a két test ellenkező irányban megtett útja:

$$s_{\mathrm{m}} = u_{\mathrm{m}} t = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0,2\ \mathrm{s} = 0,2\ \mathrm{m},$$

és

$$s_{\mathrm{M}} = u_{\mathrm{M}} t = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0,2\ \mathrm{s} = 0,8\ \mathrm{m},$$

tehát a kocsi és a kis test a talajra éréskor egymástól

$$d = s_{\mathrm{m}} + s_{\mathrm{M}} = 0,2\ \mathrm{m} + 0,8\ \mathrm{m} = \mathbf{1\,m}$$

távolságra került.

[Ugyanez tömegközépponti rendszerből leírva:

$$s_{\mathrm{m}_{rel}} = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0,2\ \mathrm{s} = 0,6\ \mathrm{m},$$

$$s_{\mathrm{M}_{\mathrm{rel}}} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0,2\ \mathrm{s} = 0,4\ \mathrm{m}.$$

Az egymástól mért távolság ekkor:

$$d = s_{\mathrm{m}_{rel}} + s_{\mathrm{M}_{\mathrm{rel}}} = 0,6\ \mathrm{m} + 0,4\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{m}.]$$

*Akinek olyan függvénytáblázata van, amelyben nem szerepel az ütközési számmal kifejezett kapcsolat a sebességek között, kicsit hosszabb úton levezetheti a keresett sebességeket.

A *tömegközépponti rendszerhez* viszonyítva az impulzus- és energia megmaradás így írható fel:

$$m u_{\mathrm{m}_{\mathrm{rel}}} = M u_{\mathrm{M}_{\mathrm{rel}}}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} m u_{\mathrm{m}_{\mathrm{rel}}}^2 + \frac{1}{2} M u_{\mathrm{M}_{\mathrm{rel}}}^2 = \frac{1}{2} D\left(\Delta l_{\max}\right)^2,$$

$$m u_{\mathrm{m}_{\mathrm{rel}}}^2 + M u_{\mathrm{M}_{\mathrm{rel}}}^2 = D\left(\Delta l_{\max}\right)^2 \tag{2}$$

(1)-ből u_{M} kifejezését (2)-be írva:

$$m u_{\mathrm{m}_{\mathrm{rel}}}^2 + M\frac{m^2}{M^2} u_{\mathrm{m}_{\mathrm{rel}}}^2 = D\left(\Delta l_{\max}\right)^2,$$

közös nevezőre hozás után

$$\frac{mM^2 + Mm^2}{M^2} u_{\mathrm{m}_{\mathrm{rel}}}^2 = D\left(\Delta l_{\max}\right)^2.$$

Egyszerűsítés, átrendezés és gyökvonás után a kis test tömegközépponthoz viszonyított sebességére kapjuk:

$$u_{\mathrm{m_{rel}}} = \Delta l_{\max}\sqrt{\frac{DM}{m\left(m+M\right)}} = 0,484\ \mathrm{m}\sqrt{\frac{64\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{1\ \mathrm{kg}\left(1\ \mathrm{kg}+1,5\ \mathrm{kg}\right)}} = 2,999\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ekkora sebességgel mozog a kis test a tömegközépponthoz viszonyítva *balra*. A talajhoz viszonyítva pedig

$$u_{\mathrm{m}} = \upsilon_{\mathrm{Tkp}} - u_{\mathrm{m_{rel}}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A kocsi pedig $$u_{\mathrm{M_{rel}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}}u_{\mathrm{m_{rel}}} = \frac{1}{1,5}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

azaz a talajhoz viszonyítva:

$$u_{\mathrm{M}} = \upsilon_{\mathrm{Tkp}} + u_{\mathrm{M_{rel}}} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

3) Egy exobolygó adatai: átmérője 2,6-szerese a Föld átmérőjének, átlagsűrűsége 1870 kg/m^3.

a) A felületén található testek súlya hányszorosa a földfelszíni értékhez viszonyítva?

b) Mekkora vízszintes irányú sebességgel rendelkezzen egy test ahhoz, hogy körpályán keringjen az exobolygó körül? (Helyi első kozmikus sebessége.)

c) Mekkora periódusidővel történik mindez? (A bolygó forgását hagyjuk figyelmen kívül.)

(Suhajda János, Kiskőrös)

Megoldás. Adatok: R_{E} = 2,6R_{F} = 16564,6 km; ρ_{E} = 1870 kg/m^3.

a) A testek súlya a rájuk ható tömegvonzási erővel egyenlő (exobolygónk nem forog):

$$mg_{\mathrm{E}} = \gamma\,\frac{M_{\mathrm{E}}m}{R_{\mathrm{E}}^2}, \qquad (1)$$

ahol az exobolygó tömege:

$$M_{\mathrm{E}} = \rho_{\mathrm{E}}V_{\mathrm{E}} = \rho_{\mathrm{E}}\,\frac{4}{3}R_{\mathrm{E}}^3\pi. \qquad (2)$$

(1)- és (2)-ből az exobolygó felületének közelében a gravitációs gyorsulás:

$$g_{\mathrm{E}} = \gamma\,\frac{M_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}^2} = \gamma\rho_{\mathrm{E}}\,\frac{4}{3}R_{\mathrm{E}}\pi = 6,67\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot 1870\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\frac{4}{3}16564,6\ \mathrm{km}\cdot\pi = 8,654\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A két gyorsulás aránya:

$$\frac{g_{\mathrm{E}}}{g_{\mathrm{F}}} = \frac{8,65}{9,81} = \mathbf{0,882.}$$

(Aki másképpen számol felhasználva a függvénytáblázat adatait, kissé eltérő eredményt kaphat:

$$\frac{g_E}{g_F} = \frac{\gamma\rho_E \frac{4}{3} R_E \pi.}{\gamma\rho_F \frac{4}{3} R_F \pi} = \frac{\rho_E 2,6 R_F.}{\rho_F R_F} = 2,6\frac{\rho_E}{\rho_F} = 2,6\frac{1870}{5520} = 0.883.$$

Ez az érték is elfogadható.)

b) Az exobolygó körül keringő testre ható gravitációs erő adja a centripetális erőt a körmozgáshoz:

$$mg_E = m\frac{v^2}{R_E} \quad\rightarrow\quad v = \sqrt{g_E R_E} = \sqrt{8,65\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 16564600\ \text{m}} = \mathbf{11,970\frac{km}{s}}.$$

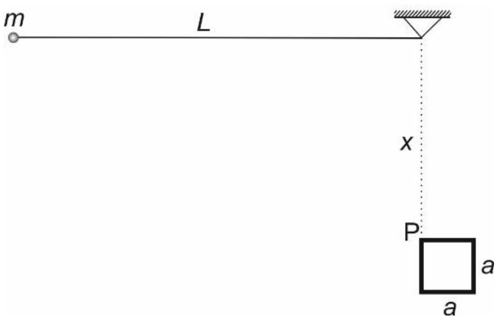
Ekkora az exobolygó első kozmikus sebessége.

c) A mozgás periódusideje (keringési ideje) a sebességből már meghatározható:

$$v = \frac{2R_E\pi}{T} \quad\rightarrow\quad T = \frac{2R_E\pi}{v} = \frac{2\cdot 16564600\ \text{m}\cdot\pi}{11970\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 8694,94\ \text{s} = 2,41526\ \text{óra} =$$

$$= \mathbf{2\ óra\ 24\ perc\ 1,5\ másodperc.}$$

4) Egy fonálhoz rögzített kisméretű, m = 0,5 kg tömegű testet vízszintesig kitérítünk. A felfüggesztési pont alatt x = 1 m távolságban egy négyzet keresztmetszetű testet helyeztünk el az ábrán látható módon. A négyzet éle a = 0,2 m hosszúságú.
(A négyzet keresztmetszetű test jól rögzített, nem mozdul el.)



a) Mekkora a fonál L hossza, ha a fonál végén lévő testet elengedve az a négyzet P-vel jelölt csúcsánál érkezik függőleges irányú sebességgel a négyzethez?

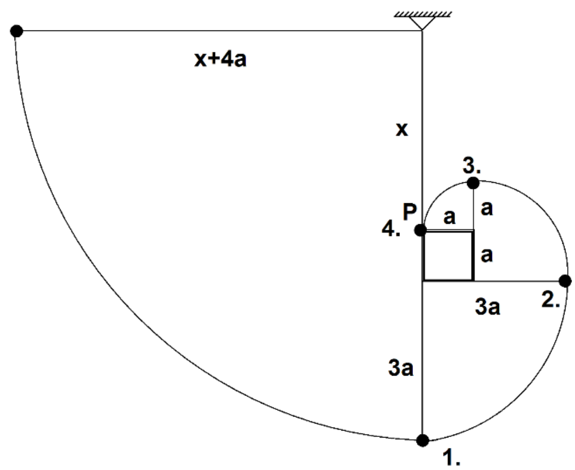
b) Mekkora a fonálerő és a testre ható nehézségi erő nagyságának hányadosa, amikor a fonál elengedés után először lesz függőleges, illetve amikor először lesz újra vízszintes a mozgás során?

c) A megadott négyzet esetén mekkora az x távolság, illetve a fonál L hosszának minimális értéke, hogy az *a)* kérdésnél megadott módon érkezzen az m tömegű test a P pontba?

(Kiss Miklós, Gyöngyös)

Megoldás: *a)* Jelöljük meg a test egyes helyzeteit az ábrán: 1., 2., 3., 4. számokkal! Az egyes szakaszok hossza az ábra alapján adódik.

Akkor csapódik a test függőlegesen a 4. ponthoz, ha a fonál megtörve a 3. ponton szabad hossza éppen a, amint az ábra mutatja.



Az ábrából – véghelyzettől visszafejtve – látszik, hogy a fonál függőleges szakasza a 3. pontnál $2a$, a vízszintes szakasza a 2. pontnál $3a$, és a hasábbal érintkező függőleges szakasza az 1. pontnál $4a$ hosszúságú, ami az x-hez hozzáadva adja a teljes fonálhosszat:

$$L = x + 4a = 1\text{ m} + 4 \cdot 0,2\text{ m} = \mathbf{1,8\,m.}$$

b) Az első függőleges helyzetben kétféle erőt kell számolnunk, a fonál ütközése előtt és után.

Mozgásegyenlet az ütközés előtt:

$$K_1 - mg = m\frac{(v_1)^2}{L},$$

valamint az energiatétel:

$$mgL = \frac{1}{2}m(v_1)^2$$

Ezért:

$$K_1 - mg = m2g \quad \rightarrow \quad K_1 = 3mg = 3 \cdot 0,5\text{ kg} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{15\,N,}$$

Ebből
$$\frac{K_1}{mg} = \mathbf{3}. \quad .$$

A fonál ütközése után:

$$K_1' - mg = m\frac{(v_1)^2}{3a}$$

a sebesség nem változik, így:

$$K_1' - mg = m\frac{2gL}{3a} \quad \rightarrow \quad K_1' = mg\left(1 + \frac{2L}{3a}\right) = 0,5\text{ kg} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(1 + \frac{2 \cdot 1,8\text{ m}}{3 \cdot 0,2\text{ m}}\right) = \mathbf{35\,N.}$$

Ebből
$$\frac{K_1'}{mg} = \frac{35}{5} = \mathbf{7.} \quad .$$

Az első vízszintes helyzetben is kétféle erőt kell számolnunk, a fonál ütközése előtt és után.
Mozgásegyenlet az ütközés előtt:

$$K_2 = m\frac{(v_2)^2}{3a},$$

valamint az energiatétel:

$$mg\left(x + a\right) = \frac{1}{2}m(v_2)^2.$$

Az utóbbiból:

$$K_2 = m\frac{2\left(x + a\right)g}{3a} = 0.5\text{ kg}\frac{2\left(1\text{ m} + 0,2\text{ m}\right)}{3 \cdot 0,2\text{ m}}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{20\,N.}.$$

Ebből
$$\frac{K_2}{mg} = \frac{20}{5} = \mathbf{4.} \quad .$$

A fonál ütközése után:

$$K_2{}' = m\frac{(\upsilon_2)^2}{2a} = \frac{2mg\left(x+a\right)}{2a} = \frac{2\cdot 5\ \mathrm{N}\cdot 1{,}2\ \mathrm{m}}{2\cdot 0{,}2\ \mathrm{m}} = \mathbf{30\ N,}$$

Ebből
$$\frac{K_2'}{mg} = \frac{30}{5} = \mathbf{6.}$$

c) Ha egy adott értéknél kisebb az *x* távolság, a fonál a folyamat közben meglazul, és nem érkezik a kívánt módon a kis test a *P* pontba, u. i. az *x – a* süllyedéskor nyert energia nem fedezi a szükséges mozgási energiát ill. a υ_3 sebességet a 3. pontban.

A mozgásegyenlet a legfelső (3.) pontban a fonál hasábnak *ütközése előtti* pillanatban:

$$K + mg = m\frac{\upsilon^2}{2a}.$$

Határesetben *K* = 0, innen

$$g = \frac{\upsilon^2}{2a} \quad\rightarrow\quad \upsilon^2 = 2ag. \qquad (1)$$

A munkatétel megadja az ottani pillanatnyi sebességet:

$$mg\left(x-a\right) = \frac{1}{2}m\upsilon^2. \qquad (2)$$

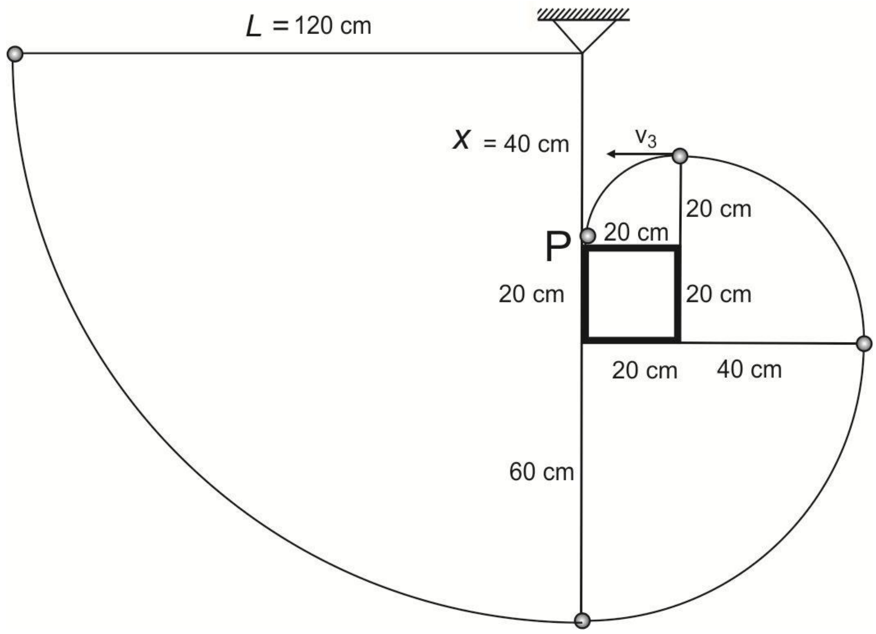
A sebességnégyzetet (1)-ből beírva és *m*-mel egyszerűsítve:

$$g\left(x-a\right) = \frac{1}{2}2ag \quad\rightarrow\quad x-a=a \quad\rightarrow\quad x-2a = 2\cdot 0{,}2\ \mathrm{m} = 0{,}4\ \mathrm{m} = \mathbf{40\,cm.}$$

És ezzel a fonálhossz:

$$L = x + 4a = 40\ \mathrm{cm} + 4\cdot 20\ \mathrm{cm} = \mathbf{120\,cm.}$$

Tehát az *x* legalább 40 cm, és az ehhez tartozó *L* fonálhossz 120 cm.
Ezért az *a)* esetben megadott adatokkal valóban végbe is megy a kívánt folyamat (l. az ábrát!).



36. Mikola Sándor fizikaverseny 2017 Döntő
Gyöngyös, 9. évfolyam

Szakgimnázium

Megoldások

1) Egy vízszintes helyzetű pingpongütőt 1 m/s állandó nagyságú sebességgel emelünk függőlegesen a fölötte tartott pingponglabda felé. Amikor 75 cm távolságban vannak egymástól, a labdát kezdősebesség nélkül elengedjük. Ezután a labda többször is teljesen rugalmasan ütközik az ütővel. A közegellenállás elhanyagolható, $\mathbf{g = 10\,\frac{m}{s^2}}$.

a) Mekkora a labdának az ütőhöz viszonyított érkezési és visszapattanási sebessége az ütközések során?

b) Milyen időközönként ütközik a labda az ütővel?

c) A talajhoz képest mekkora utat tesz meg a labda a levegőben két ütközés között?

(Dudics Pál Debrecen)

Megoldás. *a)* Rögzítsük vonatkoztatási rendszerünket az ütőhöz. Ebben a vonatkoztatási rendszerben a labdát a nyugalomban lévő ütő felett h = 0,75 m magasságból, v_0 = 1 m/s kezdősebességgel indítjuk lefelé. Az első ütközésig eltelt idő az út-idő összefüggés alapján számítható:

$$h = v_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

Behelyettesítés után: $$5t^2 + t - 0{,}75 = 0,$$

ahonnan

$$t = 0{,}3 \text{ s.}$$

Az ütközés pillanatában a labda sebessége az ütőhöz viszonyítva:

$$v = v_0 + gt = \mathbf{4\,\frac{m}{s}}.$$

b) Az ütközés után a labda ezzel a kezdősebességgel a függőleges hajítás törvényei szerint mozog az ütőhöz képest. Az ütközések közötti időtartam egyenlő a hajítás idejével:

$$t_h = 2\frac{v}{g} = \mathbf{0{,}8\,s.}$$

c) Térjünk át a talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszerre, ahol a labda

$$v + v_0 = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

kezdősebességgel kezdi a függőleges hajítást, az ütő pedig v_0 ebességgel mozog felfelé. Két ütközés között a labda által megtett út:

$$s = 2\frac{(v+v_0)^2}{2g} - v_0 t_h = \mathbf{1{,}7\,m.}$$

(Megjegyzés: a labda az ütőhöz rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve

$$s = 2h_{\max} = \frac{v^2}{g} = 1{,}6 \text{ m}$$

utat tesz meg.)

2) Helikopter vízszintes síkban egyenletes, 72 km/h állandó nagyságú sebességgel halad egy kicsiny, korong alakú település határa mentén.

a) Mekkora a település átmérője, ha a helikopter gyorsulása 0,2 m/s^2?

b) Mennyi idő alatt változik sebességvektorának az iránya 90°-kal?

(Holics László, Budapest)

Megoldás. Adatok: $v = 72\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{áll.}$, $a = 0{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. *a)* $D = ?$ *b)* $\Delta\varphi = 90°$ $\Delta t = ?$

a) Ha a helikopter egyenletesen halad, közben gyorsul, az csak úgy lehetséges, hogy a gyorsulásvektora merőleges a sebességvektorára, aminek következtében nincs érintőleges gyorsulás, tehát a helikopter egyenletes körmozgást végez. Az egyenletesen körözõ helikopter gyorsulása pedig (centripetális gyorsulás):

$$a = \frac{v^2}{R},$$

ahonnan körpályájának sugara

$$R = \frac{v^2}{a}.$$

Ezzel a település átmérője

$$D = 2R = \frac{2v^2}{a} = \frac{2\cdot 20^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{0{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \mathbf{4000\,m = 4\,km.}$$

b) A sebességvektor merőleges a körsugárra, ezért azok elfordulási szöge megegyezik:

$$\Delta\varphi = \omega t = \frac{v}{R}t \qquad \to \qquad t = \frac{R\Delta\varphi}{v} = \frac{v^2}{a}\cdot\frac{\Delta\varphi}{v} = \frac{v\Delta\varphi}{a} = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{\pi}{2}}{0{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \mathbf{157{,}08\,s = 2{,}62\,perc}.$$

3) Két, feszítetlen állapotban 1 méter hosszú gumiszál egy-egy végét egy pontban fogjuk össze. A gumiszálak másik végeit összekötjük, és egy 1 kg tömegű testet erősítünk rá. Így mindkét gumi megnyúlása 0,2 méter. A gumiszálak felső végeit lassan egyenletesen addig távolítjuk egymástól egy vízszintes egyenes mentén, amíg a szálak 120°-ot zárnak be egymással.

Mennyi munkát végzünk eközben?

(A nehézségi gyorsulás értékét vegyük g = 10 m/s^2-nek.)

(Simon Péter, Pécs)

Megoldás. Adatok: $m = 1\text{ kg}$, $l_0 = 1\text{ m}$, $\Delta l_1 = 0{,}2\text{ m}$.

Dinamikai vizsgálat, amikor a gumiszálak függőlegesek:

$$\sum F = 0.$$

$$mg = 2D\Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg}{2D} \qquad (1)$$

Innen
$$D = \frac{mg}{2\Delta l_1} = \frac{10\text{ N}}{2\cdot 0{,}2\text{ m}} = 25\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Dinamikai vizsgálat, amikor a gumiszálak $\alpha = 120^\circ$-ot zárnak be egymással:

$$\sum F = 0.$$

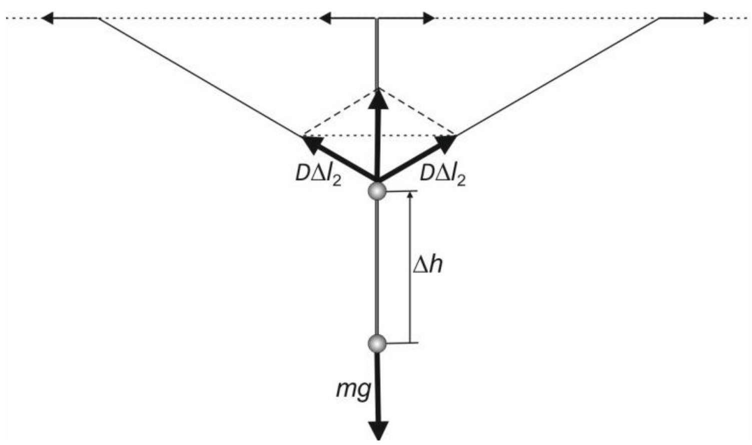
Az ábrából látszik, hogy a gumiszálak által kifejtett, mg nagyságú eredő erő éppen $D\Delta l_2$, tehát

$$\Delta l_2 = \frac{mg}{D} \qquad (2)$$

Felhasználva D értékét:

$$\Delta l_2 = \frac{mg}{D} = \frac{mg}{\frac{mg}{2\Delta l_1}} = 2\Delta l_1 = 2 \cdot 0,2\ \mathrm{m} = 0,4\ \mathrm{m}.$$

A munkavégzés egy része a test helyzetienergia-növekedését, másrészt a gumiszálak rugalmas energiájának változását fedezi.



$$W = mg\Delta h + 2 \cdot \Delta E_{\text{rugó}},$$

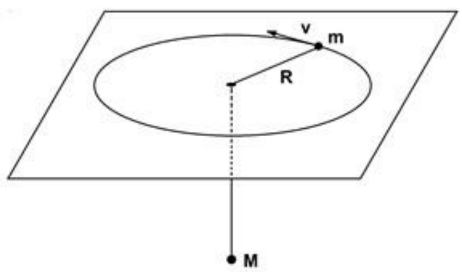
azaz

$$W = mg \cdot \left[(l_0 + \Delta l_1) - \frac{1}{2}(l_0 + \Delta l_2) \right] + 2 \cdot \frac{1}{2} D \cdot \left[(\Delta l_2)^2 - (\Delta l_1)^2 \right],$$

Beírva az ismert adatokat:

$$W = 10\ \mathrm{N} \left(1,2\ \mathrm{m} - \frac{1}{2} 1,4\ \mathrm{m} \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \left(0,4^2 \mathrm{m}^2 - 0,2^2 \mathrm{m}^2 \right) = 5\ \mathrm{J} + 3\ \mathrm{J} = \mathbf{8\ J.}$$

4) A M és a m tömegű test a vízszintes lemezen átfűzött fonállal van összekötve az ábrán látható módon. Az m tömegű test körbe halad. A fonál sehol sem súrlódik, és nem nyúlik. Számoljunk $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ értékkel.
Három esetet vizsgálunk.



a) Az első esetben nincs súrlódás és a test egyenletes sebességgel halad. Mekkora az m tömegű test sebessége?
(Ebben az esetben $m = 0,1\ \mathrm{kg}$, $M = 0,4\ \mathrm{kg}$, $R = 40\ \mathrm{cm}$)

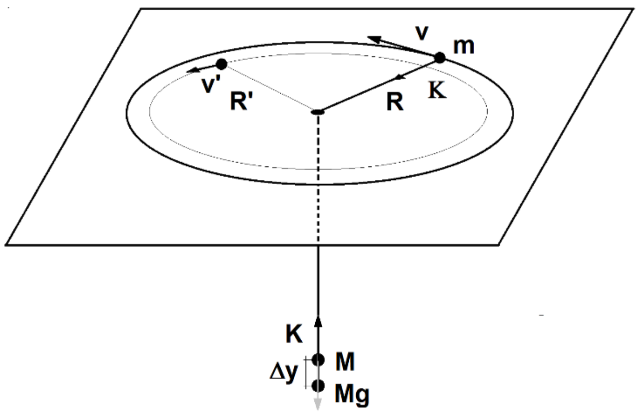
b) A második esetben van $\mu = 0,005$ együtthatóval jellemzett súrlódás és $m = M$. Ekkor a sugár egy fordulat alatt R'-re csökken. Mekkora itt egy fordulat megtétele után az R'/R arány, ha a kezdősebesség megegyezik az *a)* esetbeli sebességgel? (Alkalmazzunk közelítést, ami a kicsiny súrlódási együttható miatt megtehető!)

c) A harmadik esetben mekkora a súrlódási együttható, ha egy fordulat során a sugár értéke $R = 15,5\ \mathrm{cm}$ -ről $R' = 14,5\ \mathrm{cm}$ -re csökken? (Most $m = 0,15\ \mathrm{kg}$, $M = 0,3\ \mathrm{kg}$).

d) Mekkora a kezdő és végsebesség aránya a harmadik eseten?

(Kiss Miklós, Gyöngyös)

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit!



a) Az *m* tömegű test egyenletes körmozgást végez, az *M* tömegű pedig egyensúlyban van. Ezért a testekre ható erők alapján:

$$K = ma_{cp}$$

és

$$K - Mg = 0$$

Ezért

$$Mg = m\frac{v^2}{R},$$

ebből

$$v^2 = \frac{M}{m}gR$$

és így

$$v = \sqrt{\frac{M}{m}gR}$$

Adatokkal:

$$v = \sqrt{\frac{0,4\,\mathrm{kg}}{0,1\,\mathrm{kg}}10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}0,4\,\mathrm{m}} = \mathbf{4}\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}.$$

b) A súrlódás csökkenti a sebességet, ezért megváltozik a sugár is. Az *M* tömegű test helyzeti energiája csökken. A test annyit süllyed, amennyit a sugár csökken: $\Delta y = \Delta R$.

A munkatétel alapján egy fordulatot megtéve (felhasználva, hogy az *M* tömegű test süllyedéskori sebessége egy fordulat alatt messzemenően elhanyagolható a körmozgást végző test sebességéhez viszonyítva):

$$mg\Delta y - \mu mgs = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2,$$

innen

$$2g\Delta y - 2\mu gs = v'^2 - v^2$$

Az *a)* eset alapján, figyelembe véve, hogy a két tömeg itt egyenlő: $v^2 = gR$, illetve $v'^2 = gR'$.

Az egy fordulat megtétele közben csökken a sugár, ezért az utat

$$s = 2\pi\frac{R+R'}{2} = \pi(R+R')$$

módon számolhatjuk. Ezeket, valamint hogy $\Delta y = R - R'$ figyelembe véve:

$$2g(R-R') - 2\mu g\pi(R+R') = gR' - gR.$$

Egyszerűsítve *g*-vel:

$$2R - 2R' - 2\mu\pi R - 2\mu\pi R' = R' - R,$$

összevonások és rendezés után:

$$3R - 2\mu\pi R = 3R' + 2\mu\pi R'$$

$$(3-2\mu\pi)R = (3+2\mu\pi)R'$$

Ebből:

$$\frac{R'}{R} = \frac{3-2\mu\pi}{3+2\mu\pi}.$$

Behelyettesítve: $$\frac{R'}{R}=\frac{3-2\cdot 0,005\cdot\pi}{3+2\cdot 0,005\cdot\pi}=\mathbf{0,979}.$$

c) Ebben az esetben:

$$Mg\Delta y-\mu mgs=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2,$$

mivel

$$v^2=\frac{M}{m}gR \quad \text{és} \quad v'^2=\frac{M}{m}gR',$$

ezek beírásával:

$$Mg(R-R')-\mu mg\pi(R+R')=\frac{1}{2}MgR'-\frac{1}{2}MgR,$$

majd átalakítások után az eredményt megkapjuk:

$$2Mg(R-R')-\mu 2mg\pi(R+R')=MgR'-MgR$$

$$2MR-2MR'-\mu 2m\pi R-\mu 2m\pi R'=MR'-MR$$

$$3M(R-R')=\mu 2m\pi(R+R')$$

$$\mu=\frac{3M(R-R')}{2m\pi(R+R')}=\frac{3\cdot 0,3\cdot 1}{2\cdot 0,15\cdot\pi\cdot 30}=\mathbf{0,032}.$$

d) Mivel

$$v^2=\frac{M}{m}gR \quad \text{és} \quad v'^2=\frac{M}{m}gR',$$

ezek alapján:

$$\frac{v'^2}{v^2}=\frac{R'}{R},$$

tehát: $$\frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{R}{R'}}=\sqrt{\frac{15,5}{14,5}}=\mathbf{1,034.}$$

Megjegyzés:
Az M tömegű test olyan lassan süllyed, hogy a mozgási energiáját elhanyagoltuk.