XXXIV. Mikola Sándor fizikaverseny 2015. Döntő
Gyöngyös, 9. évfolyam

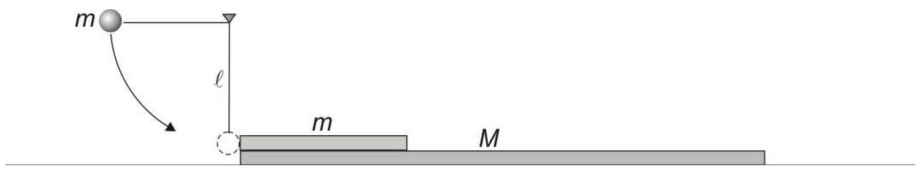
Megoldások

Szakközépiskola

1. Egy elegendően hosszú, M = 4 kg tömegű deszka jégpályán nyugszik. Erre a deszkára egy m = 2 kg tömegű hasábot helyeztünk az ábra szerint. Egy ℓ =1,8 m hosszú fonálon felfüggesztett ugyancsak m tömegű golyó fonalát a vízszintesig kitérítettük, majd nyugalomból elengedtük, amely abszolút rugalmasan, pillanatszerűen ütközött az m tömegű hasábbal. A hasáb és a deszka közötti súrlódás együtthatója μ = 0,25, a jégpálya súrlódásmentesnek tekinthető.
A mozgás során a hasáb mindvégig teljes hosszában a deszkán marad.

a) Indítástól számítva mennyi idő múlva érik el a közös sebességüket, és

b) mekkora ez a közös sebesség?



(dr. Wiedemann László)

Megoldás.

a) Az inga gömbjének tökéletesen rugalmas és pillanatszerű ütközése azt jelenti, hogy a hasábbal való kölcsönhatása során fellépő erő mellett elhanyagolható minden más, pl. a súrlódási erő, így a hasáb úgy szerzi meg kezdősebességét, hogy közben az alatta levő deszka meg se moccan. Az ütköző golyó és a hasáb egyenlő tömege miatt „sebességcsere” történik, vagyis a golyó megáll, a hasáb pedig átveszi a golyó leérkezési sebességét, és ezzel, mint kezdősebességgel kezdi meg csúszását a kezdetben nyugvó deszkán.

A leérkező golyó ütközéskori sebessége

$$v=\sqrt{2g\ell}=\sqrt{2\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1{,}8\ \mathrm{m}}=6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ezzel, mint kezdősebességgel indul meg a hasáb csúszása a kezdetben nyugvó deszkán.

A súrlódási erő gyorsítja mindkét testet, ahol

$$|F|=\mu mg.$$

Ezért

$$a_\mathrm{m}=-\mu g, \qquad \text{és} \qquad a_\mathrm{M}=\mu g\frac{m}{M}.$$

A sebességek:

$$v_\mathrm{m}=v-\mu gt,$$

$$v_\mathrm{M}=\mu g\frac{m}{M}t.$$

A v_m = v_M-re kell az időt kiszámítani. Innen

$$v-\mu gt=\mu g\frac{m}{M}t \qquad \to \qquad t=\frac{v}{\mu g\left(1+\frac{m}{M}\right)}=\frac{6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}25\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(1+\frac{2\ \mathrm{kg}}{4\ \mathrm{kg}}\right)}=\mathbf{1{,}6\ s}.$$

b) A v_k közös sebesség akár v_M és t ismeretében, akár az impulzusmegmaradás tételből számítható. Figyelembe véve, hogy az M tömegű test nyugalomból indult:

$$v_\mathrm{k} = a_\mathrm{M} t = \mu g \frac{m}{M} \frac{v}{\mu g\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \frac{m}{m+M} v = \frac{2\ \mathrm{kg}}{2\ \mathrm{kg}+4\ \mathrm{kg}} 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathbf{2\,\frac{m}{s}},$$

vagy

$$mv = \left(m+M\right) v_\mathrm{k} \quad \rightarrow \quad v_\mathrm{k} = \frac{m}{m+M} v = \frac{2\ \mathrm{kg}}{2\ \mathrm{kg}+4\ \mathrm{kg}} 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathbf{2\,\frac{m}{s}}.$$

2. Egy lefelé haladó mozgólépcső alja és teteje között a szintkülönbség 20 méter. Egy 70 kg tömegű, hóbortos diák felszalad a mozgólépcső aljától a tetejéig. A diák lépcsőfokokhoz viszonyított (átlag)sebessége másfélszer akkora, mint a mozgólépcső haladási sebessége. Mennyi munkát végez a diák mire felér? Mire fordítódik a befektetett munka? (A nehézségi gyorsulás értéke 9,8 m/s^2.)

(*Vigh Máté, Budapest*)

Megoldás. Elsőre azt gondolhatnánk, hogy energetikailag egyetlen változás történik a diák felfutása során: a diák a nehézségi erőtérben $h = 20$ méterrel magasabbra kerül. Ennek során az m tömegű diák helyzeti energiájának megváltozása:

$$\Delta E_\mathrm{grav} = mgh = 13,7\ \mathrm{kJ},$$

és ugyanekkora érték adódna a diák munkavégzésére is.

Ez az érvelés azonban hibás! A diák ugyanis a nehézségi erő leküzdésén kívül a mozgólépcsőt is nyomja lefelé (átlagosan) mg erővel. Álló lépcső esetén ez nem jelentene többletmunkát, a *lefelé haladó* mozgólépcsőnél viszont van az erő irányában elmozdulás, ezért a diák pozitív munkát végez rajta („segíti" a mozgólépcső motorjának működését). Mivel a lépcsőfokok (lefelé mutató) függőleges sebességkomponense éppen kétszerese a diák emelkedési sebességének, így a diák által a mozgólépcsőn végzett munka teljesítménye is kétszerese a nehézségi erő ellenében végzett munka teljesítményének. A mozgólépcsőn végzett munka tehát

$$W_\text{lépcsőn} = 2mgh,$$

a diák összes munkavégzése pedig

$$W_\text{diák} = W_\text{lépcsőn} + \Delta E_\mathrm{grav} = 3mgh = 41{,}1\ \mathrm{kJ}.$$

A befektetett munkavégzés tehát 1/3 részben a diák helyzeti energiáját növeli, 2/3 részben pedig a mozgólépcső motorját segíti.

Megjegyzés. A helyes végeredmény megkapható a mozgólépcsőhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben is. Itt azt látjuk, hogy a lépcsőfokok állnak, a mozgólépcső felső szintje állandó sebességgel emelkedik, miközben a diák másfélszer ekkora sebességgel lohol a cél után. Itt a diáknak a mozgólépcső eredeti h magasságának háromszorosát kell megmásznia, azaz a befektetett munka $3mgh$. A kérdés második felén (mire fordítódik ez a munka?) azonban a Versenyzőnek így is el kell gondolkodnia. Ha a Versenyző ezzel a gondolatmenettel helyesen eljut addig, hogy $2mgh$ munka növeli a motor energiáját, természetesen maximális pontszám adható.

3. Két, l hosszúságú fonál egyik végére m illetve $3m$ tömegű testeket erősítettünk. Másik végüket közös pontban rögzítettük. Mindkét testet a fonalak vízszintes helyzetéig kitérítettük, majd elengedtük. Ezután centrálisan és tökéletesen rugalmasan ütköztek egymással. (A közegellenállást hagyjuk figyelmen kívül! Az ütközést tekintsük pillanatszerűnek!)

a) Az ütközést követően mekkora lett a sebességük?

b) Az ütközés után mekkora a fellépő fonálerő a fonalak függőleges helyzeteiben?

(Suhajda János)

Megoldás. *a)* A mechanikai energia megmaradás törvényéből következik hogy azonos nagyságú sebességgel és egyszerre érkeznek a fonalak végén levő testek a fonalak függőleges helyzetébe:

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gl}.$$

Az ütközési folyamatra felírható a mechanikai energiamegmaradás és a lendületmegmaradás törvénye:

$$\frac{1}{2}3mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}3mu_2^2 + \frac{1}{2}mu_1^2, \quad \rightarrow \quad 4v^2 = 3u_2^2 + u_1^2 \tag{1}$$

$$3mv + (-mv) = 3mu_2 + mu_1, \quad \rightarrow \quad 2v = 3u_2 + u_1. \tag{2}$$

(2)-ből u_1-et kifejezve:

$$u_1 = \ 2v - 3u_2. \tag{2'}$$

Ezt (1)-be írva: $4v^2 = 3u_2^2 + (2v - 3u_2)^2$.

A műveletek elvégzése és rendezés után kapjuk:

$$4v^2 = 3u_2^2 + 4v^2 - 12u_2 v + 9u_2^2$$

$$12u_2^2 - 12u_2 v = 0 \ .$$

Innen

$$u_2 = \frac{12v \pm \sqrt{144v^2 - 0}}{24} = \begin{matrix} v \\ 0 \end{matrix}$$

Az első megoldás nem felel meg a folyamatnak, mert azt jelentené, hogy változatlan sebességgel mozog tovább a 3*m* tömegű golyó (nincs ütközés), a második felel meg a feladatnak, a 3*m* tömegű golyó megáll. Az *m* tömegű golyó pedig (2')-ből

$$u_1 = \ 2v - 3u_2 = \ 2v - 0 = \ 2v = 2\sqrt{2gl}$$

sebességgel pattan vissza róla, és folytatja útját az *l* sugarú körpályáján.

b) Az *m* tömegű test mozgását vizsgáljuk tovább. Jelöljük K_1-gyel ill. K_2-vel az alsó ill. a felső függőleges fonálhelyzethez tartozó fonálerőket! A pillanatnyi függőleges fonálhelyzetekben a test gyorsulása is függőleges, így mindkét esetre érvényes az eredő erőre:

$$\sum F = F_{cp} = ma_{cp.}.$$

Az alsó helyzetben

$$K_1 - mg = m\frac{u_1^2}{l}.$$

K_1-et kifejezve és u_1-et behelyettesítve kapjuk:

$$K_1 = mg + m\frac{\left(2\sqrt{2gl}\right)^2}{l} = mg + \frac{8gl}{l} = \mathbf{9mg.}$$

A felső helyzetben:

$$K_2 + mg = \frac{mu_1'^2}{l}.$$

Itt az *m* tömegű golyó új sebességével kell számolnunk.(Most derül ki, hogy a legfelső helyzetben is feszes marad-e a fonál.) Alkalmazzuk a munkatételt:

$$\frac{1}{2}mu_1'^2 - \frac{1}{2}mu_1^2 = -mg2l.$$

Innen

$$u_1'^2 = u_1^2 + 4gl = \left(2 \cdot \sqrt{2gl}\right)^2 - 4gl = 4gl \quad \rightarrow \quad u_2' = 2\sqrt{gl}.$$

Ezt K_2 egyenletébe írva:

$$K_2 = \frac{mu_1'^2}{l} - mg = \frac{m4gl}{l} - mg = \mathbf{3mg}.$$

A fonálerők fent: 3*mg*, lent 9*mg*, a 3*m* tömegű testnél csak lent 3 *mg*.

4. Egy H = 80 m magas torony tetejéről egy pontból nem egyszerre kezdősebesség nélkül elejtenek egy-egy acélgolyót. Amikor az első már h = 1,25 m-t esett, akkor indítják a másikat.

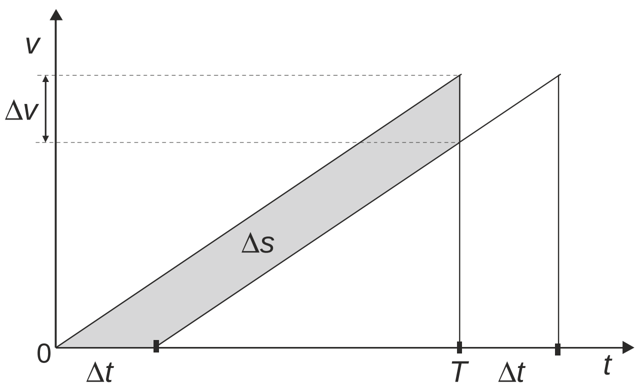
a) Mekkora lesz a távolság köztük abban a pillanatban, amikor az első talajt ér?

b) Mennyi idő telik el a talajtéréskor a két koppanás között?

(A légellenállás elhanyagolható, számoljunk g = 10 m/s^2-tel!)

(Holics László)

I. megoldás. *a)* A két test egymástól mért távolsága állandóan növekszik, de sebességük különbsége (egymáshoz viszonyított sebességük) állandó. A grafikon mutatja a két test sebesség-idő függvényének képét. A grafikon alatti terület jellemzi az egyes testek által megtett utat, így az elsőnek indított test leérkezésének T idejéig a két grafikon alatti területek (szürkével jelzett) különbsége a köztük levő kérdezett távolság. Meghatározandó tehát T és Δt, ahol az utóbbi a két indítás közötti időkülönbség.



A elsőnek indított test leérkezésig eltelt menetideje:

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 80\text{ m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}=4\text{ s.}$$

A második golyó indítása Δt idővel később történik, akkor, amikor az első már s_1 = 1,25 m utat megtett. Ennek bekövetkezte az indítás után:

$$\Delta t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2s_1}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1,25\text{ m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}=0,5\text{ s}$$

idővel később lesz. Az elsőnek indított test talajtérésig megtett útja $s_1 = H$, a második ekkor még úton van, és az általa megtett út eddig a pillanatig:

$$s_2=\frac{1}{2}g\left(T-\Delta t\right)^2=\frac{1}{2}10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(4\text{ s}-0,5\text{ s}\right)^2=61,25\text{ m.}$$

Így a két test távolsága az első test leérkezésekor

$$\Delta s=s_1-s_2=H-s_2=80\text{ m}-61,25\text{ m}=\mathbf{18,75\,m.}$$

b) Az ábrából látszik, hogy a két koppanás közt eltelt idő azonos az indítási idők különbségével, tehát

$$T-t_2=\Delta t=\mathbf{0,5\,s.}$$

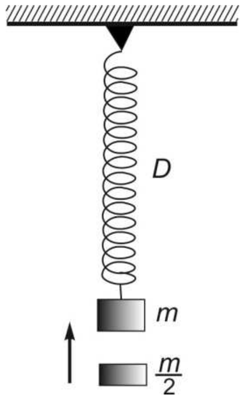
II. megoldás. Helyezzük a vonatkoztatási rendszerünket a másodszorra indított golyóra! Ekkor egymáshoz képest nem gyorsulnak, tehát a távolságukat az egyenes vonalú, egyenletes mozgás összefüggései adják meg:

$$\Delta s=s_1+v_1\Delta t=s_1+\sqrt{2gh_1}\left(T-\Delta t_1\right)=s_1+\sqrt{2gh_1}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}}-\sqrt{\frac{2h_1}{g}}\right)=$$

$$=1,25\text{ m}+\sqrt{2\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1,25\text{ m}}\left(\sqrt{\frac{2\cdot 80\text{ m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}-\sqrt{\frac{2\cdot 1,25\text{ m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}\right)=\mathbf{18,74\,m.}$$

(Röviden: $\Delta s=1,25\text{ m}+5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(4\text{ s}-0,5\text{ s}\right)=18,75\text{ m.}$)

XXXIV. Mikola Sándor fizikaverseny 2015. Döntő
Gyöngyös, 9. évfolyam
Gimnázium



1. Az ábra szerinti, függőleges helyzetű, D = 30N/m direkciós erejű rugóhoz egy m = 100g tömegű test van erősítve. A test egyensúlyi helyzetben van. A testhez alulról, függőlegesen felfele irányuló v_o nagyságú sebességgel egy $m/2$ tömegű test csapódik. Ütközéskor a két test összetapad.

a) Mekkora v_o, ha ütközés után az összetapadt testek legnagyobb emelkedésekor a rugó nyújtatlan?

b) Mekkora volt a felfele és lefele irányú mozgás közben a testek legnagyobb sebessége?

(Zsigri Ferenc)

Megoldás *a.)* A megoldáshoz az ütközés lezajlása után használhatjuk a mechanikai energia megmaradás törvényét, ugyanis ettől kezdve csak konzervatív erők hatnak.
Az ütközés utáni mozgási energia és a rugalmas energia csökkenése megegyezik a helyzeti energia növekedésével.
A nagyon rövid ideig tartó ütközéskor a külső erők elhanyagolhatók, vagyis a testek lendülete megmarad. Így az ütközés utáni közös u sebességgel:

$$1{,}5mu = 0{,}5mv_o, \quad \rightarrow \quad u = v_o/3.$$

A rugó y megnyúlására az egyensúlyi állapotban:

$$Dy = mg \quad \rightarrow \quad y = mg/D$$

Ezekkel az energiamérleg:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{3}{2}mgy.$$

Behelyettesítve u-t és **y**-t:

$$\frac{3}{2}m\frac{v_0^2}{9} + D\frac{m^2g^2}{D^2} = 3mg\frac{mg}{D}.$$

Egyszerűsítések után:

$$\frac{v_0^2}{6} + \frac{mg^2}{D} = 3\frac{mg^2}{D}.$$

Ebből a megoldás a pozitív gyök, vagyis:

$$v_0 = 2g\sqrt{\frac{3m}{D}} = \mathbf{2\frac{m}{s}.}$$

b) A lefele mutató nehézségi erő állandó, a rugóerő felfele haladva csökken, így az eredő és egyben a gyorsulás iránya is az egyensúlyi helyzet alatt felfele, felette pedig lefele mutat. A sebesség nagysága tehát az egyensúlyi helyzetig nő, majd csökken.
A testek legnagyobb sebessége tehát akkor van, amikor áthaladnak az (új) egyensúlyi helyzeten, függetlenül attól, hogy felfele, vagy lefele mozognak.
A megoldáshoz ismét használható a mechanikai energia megmaradás törvénye.
A legfelső helyzettől az egyensúlyi helyzetig a helyzeti energia csökkenése egyenlő a rugó és a mozgási energia növekedésével.
Az egyensúlyi helyzetben a rugó x megnyúlására:

$$Dx = 1{,}5mg,$$

ebből

$$x = 1{,}5mg/D.$$

A maximális sebesség legyen c, ezzel az energiamérleg:

$$\frac{3}{2}mgx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mc^2 + \frac{1}{2}Dx^2.$$

Egyszerűsítve és behelyettesítve x-et:

$$3mg\frac{3mg}{2D} = \frac{3}{2}mc^2 + D\frac{9m^2g^2}{4D^2}.$$

Egyszerűsítés után:

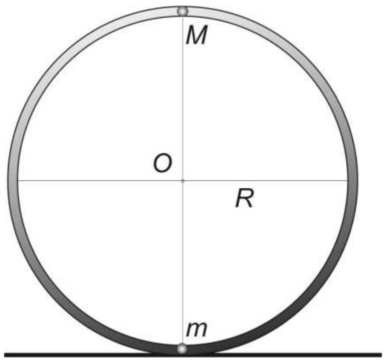
$$\frac{3mg^2}{D} = c^2 + \frac{3mg^2}{2D}.$$

Ebből rendezés után:

$$\frac{3mg^2}{2D} = c^2.$$

Innen a pozitív gyök:

$$c = g\sqrt{\frac{3m}{2D}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{0{,}71}\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}.$$



2. Elhanyagolható tömegű $R = 0{,}48\ \mathrm{m}$ sugarú gyűrű felső pontján egy M tömegű, alsó pontján egy m tömegű pontszerű test található (ábra). A gyűrű síkja függőleges és ebből nem tud kitérni. A gyűrű súrlódásmentesen mozoghat. A felső, nagyobb tömegű test elindul valamelyik irányba.

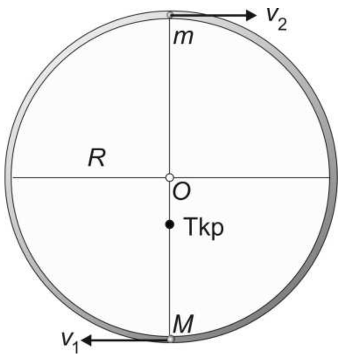
a) Mekkora a testek sebessége, amikor a M tömegű test legalul helyezkedik el?

b) Mekkora a testek sebessége, amikor azonos magasságban vannak?

A gyűrű vastagságától tekintsünk el, $M = 3\ \mathrm{kg}$, $m = 2\ \mathrm{kg}$, számoljunk $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$–tel!.

(dr. Kiss Miklós)

Megoldás:



A feltételek alapján a rendszer tömegközéppontja csak függőleges mozgást végezhet, vízszintes sebessége nulla. A kör középpontja vízszintesen mozoghat, függőleges sebessége nulla.

a) Amikor az M tömegű test kerül alsó helyzetbe a tömegközéppont függőleges sebessége zérus, mindkét test vízszintesen mozog. Mivel a tömegközéppont vízszintesen nem mozog: $Mv_1 - mv_2 = 0$, ebből

$$v_2 = \frac{M}{m}v_1.$$

Az energiamegmaradás alapján:

$$2gMR = 2gmR + \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 .$$

Ezekből:

$$2gR(M-m) = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m}v_1\right)^2$$

$$2gR(M-m) = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{m}v_1^2$$

$$2gR(M-m) = \frac{1}{2}Mv_1^2\,\frac{m+M}{m}$$

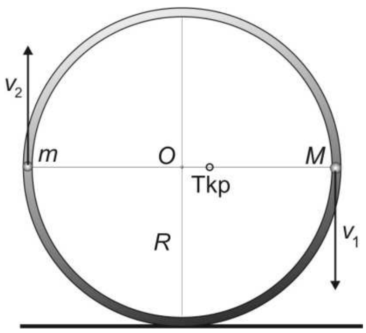
Ebből a sebességek:

$$v_1 = 2\sqrt{gR\frac{m}{M}\frac{M-m}{M+m}} \quad \text{és} \quad v_2 = 2\frac{M}{m}\sqrt{gR\frac{m}{M}\frac{M-m}{M+m}}$$

Adatokkal:

$$v_1 = 2\sqrt{10\cdot 0,48\frac{2}{3}\cdot\frac{3-2}{3+2}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\sqrt{10\cdot 0,48\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\sqrt{4\cdot 0,48\frac{1}{3}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 4\cdot 0,4 = \mathbf{1,6\frac{m}{s}},$$

$$v_2 = \frac{3}{2}\cdot 1,6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathbf{2,4\frac{m}{s}}.$$



b) Amikor ebbe a helyzetbe kerülnek a testek, a kör középpontja elérte legnagyobb vízszintes elmozdulását és éppen visszafelé fog indulni, így sebessége nulla. A rendszer az O pont körül fordul el, így a testek vízszintes sebessége zérus, függőleges sebessége egyenlő. Ennek megfelelően az energiamérleg:

$$2gMR = gMR + gmR + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 ,$$

$$gMR - gmR = \frac{1}{2}v^2(M+m) ,$$

$$gR(M-m) = \frac{1}{2}v^2(M+m) ,$$

Tehát a testek sebessége:

$$v = \sqrt{2gR\frac{M-m}{M+m}} ,$$

$$v = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0,48\frac{3-2}{3+2}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0,48\frac{1}{5}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{4\cdot 0,48}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\cdot 0,4\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0,8\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{1,386\frac{m}{s}}.$$

3. Vízszintes talajon L_0 = 0,6 m hosszú, rugalmas, elhanyagolható tömegű gumiszálhoz erősített, m = 0,1 kg tömegű, apró testet kezdünk egyre gyorsabban forgatni úgy, hogy a gumiszál kezünkben tartott vége H = 40 cm magasan van a talaj felett. A gumiszál 1 N erő hatására 10 cm-rel nyúlik meg. A súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható.

a) Mennyi munkát kell végezni ahhoz, hogy a gumiszál szögsebessége elérje az ω= 6 1/s értéket?

b) Meddig növelhető a szögsebesség?

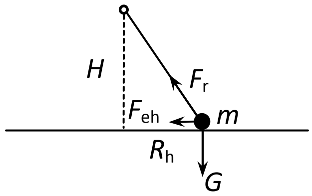
(dr. Szkladányi András)

Megoldás. *a)* Ha a szögsebesség egy bizonyos értéket meghalad, a test elválik a talajtól. Vizsgáljuk meg, hogy ez mekkora ω_h szögsebességnél következik be. Az elválás pillanatában a talaj által kifejtett erő nullára csökken. A test ettől kezdve csak a nehézségi erő és a gumiszál által kifejtett erő hatására mozog. Jelölje R_h a kúpinga sugarát a test elválásának pillanatában. Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele alapján:

$$(1)\quad F_{eh} = mR_h\omega_h^2$$

A nehézségi és az eredő erő közötti összefüggés pl. hasonlóságból kapható:

$$(2)\quad \frac{F_{eh}}{mg} = \frac{R_h}{H}$$



Az (1) és (2) egyenletek alapján:

$$(3)\quad \frac{\omega_h^2}{g} = \frac{1}{H}$$

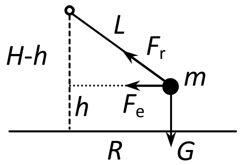
Ebből az a határ szögsebesség, amelynél a test elválik a talajtól:

$$\omega_h = \sqrt{\frac{g}{H}} = 5\ \frac{1}{s}$$

A test tehát fel fog emelkedni a talajról. Ha a szögsebesség a megadott $\omega = 6$ 1/s érték, akkor (3) alapján a test h távolsága a talajtól:

$$\frac{1}{H-h} = \frac{\omega^2}{g} \quad \rightarrow \quad h = H - \frac{g}{\omega^2} = \frac{11}{90}\,\mathrm{m} \approx 0{,}12\ \mathrm{m}$$

További hasonlósági arányból meghatározható a gumiszál hossza, illetve megnyúlása:



$$\frac{F_r}{mg} = \frac{L}{H-h}$$

$$\frac{D\cdot\Delta L}{mg} = (L_0 + \Delta L)\frac{\omega^2}{g}$$

$$(4)\quad \Delta L = \frac{L_0}{\dfrac{D}{m\omega^2} - 1} \approx 0{,}34\ \mathrm{m}$$

A körpálya sugara pedig:

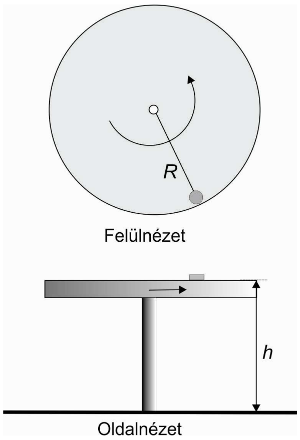
$$R = \sqrt{(L_0+\Delta L)^2 - (H-h)^2} \approx 0{,}9\ \mathrm{m}$$

A szóban forgó állapot eléréséhez szükséges munka:

$$W = \frac{1}{2}D(\Delta L)^2 + \frac{1}{2}mR\omega^2 + mgh = \mathbf{2{,}32\ J}$$

b) A szögsebesség további növelésével a rugó megnyúlása egyre nagyobbá válik. A (4) összefüggésben egy kritikus szögsebesség esetén a nevező nullává válik, a megnyúlás tehát minden határon túl növekedni fog, a test nem maradhat adott sugarú körpályán. A kritikus szögsebesség:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{D}{m}} = \mathbf{10\ \frac{1}{s}}$$



4. A talaj felett h = 0,8 m-re levő, vízszintes helyzetű tengelyezett, R = 0,6 m sugarú érdes korong szélén igen kisméretű test nyugszik. A test és a korong közötti tapadó súrlódási együttható μ = 0,96. Ezt a korongot *igen lassan* egyre gyorsabb forgásba hozzuk. Egy adott pillanatban a kis test lerepül a korongról.

Milyen távolra kerül a korong középpontjától, amikor a talajra ér?

(Holics László)

Megoldás. Mivel a korongot igen lassan növekvő sebességgel forgatjuk meg, a mozgás során fellépő (állandó, kis) érintőleges gyorsulás előbb-utóbb elhanyagolható a radiális (normál, centripetális) gyorsulás mellett. A kis testet a tapadó súrlódási erő kényszeríti a körpályára, így mindaddig, amíg a maximális tapadási súrlódó erő biztosítani tudja a kis test körmozgását, addig az nem csúszik meg. Abban a pillanatban, amikor a körmozgáshoz szükséges erő nagyobbá válik, mint amekkorát a tapadás biztosítani tud, a kis test azonnal megcsúszik, és a megszerzett sebességével megtartva lendületét, pillanatnyi mozgás irányában, elhagyja a korongot, mivel a korong szélén van (és mérete elhanyagolható), a kis test az érintő irányban távozik (kicsúszik alóla a korong). Ekkor mozgása vízszintes hajításba megy át, és g gyorsulással lezuhan a padlóra.

Meg kell határozni tehát a vízszintes hajítás kezdősebességét, majd a hajítás távolságát. Ebből a keresett távolság kiszámítható.

A megcsúszás annál a sebességnél következik be, amelyre a centripetális erő éppen meghaladná a tapadási erő maximumát:

$$\mu m g = m\frac{v^2}{R},$$

ahonnan a vízszintes hajítás kezdősebessége:

$$v = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0{,}96\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}6\ \mathrm{m}} = 2{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

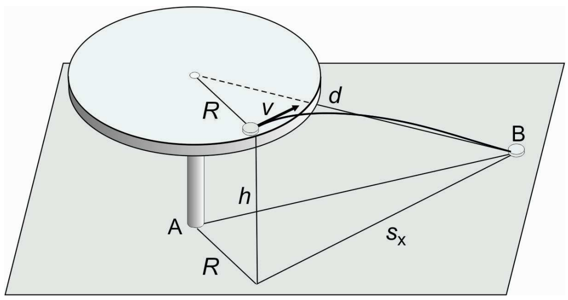
Ezzel a sebességgel kezdődik h magasságról történő vízszintes hajítás. A korong középpontjától R távolságból indulva peremétől mérve h mélységet tesz meg, a megcsúszás helyétől vízszintes irányban s_x távolságot befutva. Meg kell határoznunk az esés idejét, ebből az s_x távolságot, majd a leérkezés helyének a korong középpontjától mért távolságot.

A hajítás ideje az esési idővel egyenlő:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}8\ \mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} = 0{,}4\ \mathrm{s}.$$

Ennyi idő alatt vízszintes irányban

$$s_x = vt = 2{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}4\ \mathrm{s} = 0{,}96\ \mathrm{m}.$$



A keresett d távolság az ábra alapján:

$$d = \sqrt{h^2 + AB^2},$$

ahol az AB távolság R és s_x szakaszok merőlegessége miatt:

$$AB = \sqrt{R^2 + x_x^2}.$$

Ezzel a keresett távolság:

$$d = \sqrt{R^2 + s_x^2 + h^2} = \sqrt{0{,}6^2\mathrm{m}^2 + 0{,}96^2\mathrm{m}^2 + 0{,}8^2\mathrm{m}^2} = \mathbf{1{,}386\ m} \approx \mathbf{1{,}4\ m.}$$