Gimnázium 9. évfolyam

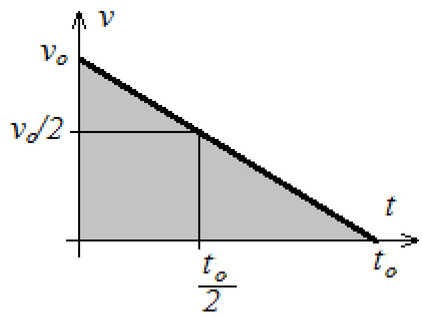
1.) Egy test vízszintes talajon csúszik. A test és a talaj közötti csúszási súrlódási együttható μ. Egy másik test $\alpha = 30^o$-os, súrlódásmentes lejtőn csúszik felfelé. A testek sebessége egy bizonyos pillanatban azonos, $\upsilon_o = 8{,}4$ m/s.

a) Mekkora μ értéke, ha az előző pillanat után azonos utat tesznek még meg a megállásig, és mekkora ez az út?
b) Mekkora lesz a sebességük a megállásig tartó mozgás félidejében?
c) Mekkora lesz a sebességük a megállásig megtett út felénél?

(Zsigri Ferenc, Budapest)

Megoldás:

a.) A vízszintes talajon mozgó test gyorsulása μg, a lejtőn mozgóé $g\sin\alpha = 5$ m/s^2 nagyságú.
A mellékelt ábra a testek sebesség-idő grafikonját mutatja. Egy bizonyos időközben a megtett út mérőszáma megegyezik a görbe alatti terület mérőszámával.



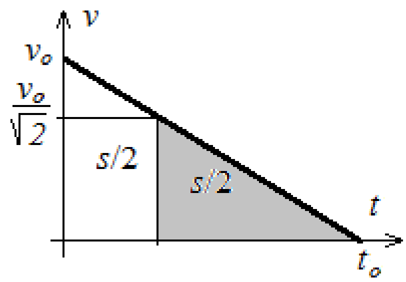
A megállásig eltelt idő $t_o = v_o/a$, ezzel a megtett út

$s = t_0\upsilon_o/2 = (\upsilon_o/2)(\upsilon_o/a) = \upsilon_o^2/2a$ 7,06 m **≈ 7 m,**

csak akkor lehet a két test esetében azonos, ha azonos a gyorsulásuk, tehát $\mu = \sin\alpha =$ **0,5**.

b.) A sebesség egyenletes csökkenése miatt félidőben a sebesség a kezdősebesség fele, $\upsilon_o/2 =$ **4,2 m/s**.

c.) A teljes s utat megadó „nagy” háromszög területének fele az $s/2$ utat megadó „kis” háromszög területe. Mivel ezek hasonlók, és a területek aránya a hasonlóság arányának négyzete, ami 1/2, ezért a hasonlóság aránya $1/\sqrt{2}$, vagyis félúton a sebesség $\upsilon_0/\sqrt{2}$ = 5,94 m/s ≈ **6 m/s**.



2.) Vízszintes talajon nyugvó, 800 kg/m^3 sűrűségű, 10 cm oldalélű homogén fakockát 20 g tömegű lövedék üt át a tömegközéppontján átmenő, vízszintes sebességgel. A fakocka az ütközés helyétől 2,5 méterre áll meg, a lövedék pedig 20 méterre ér talajt. A csúszási súrlódási együttható értéke a fakocka és a talaj között 0,5. Az ütközést (azaz a hasábon történő áthaladást) tekintsük pillanatszerűnek, a közegellenállást hagyjuk figyelmen kívül!

a) Mekkora volt a lövedék sebessége az ütközés előtt?
b) Hány százalékos volt a mechanikai energiaveszteség az ütközés során?

(Szkladányi András, Baja)

Megoldás:

a)

A fakocka tömege $M = \rho V = 0{,}8$ kg, ütközés utáni w sebessége a munkatétel alapján:

$$-\mu Mgs = -\frac{1}{2}Mw^2\,,$$

$$w = \sqrt{2\mu gs} = 5 \text{ m/s}.$$

A lövedék az ütközést követően vízszintes hajítással mozog tovább. Ütközés utáni u sebessége a kinematikai egyenletekből kapható:

$$h = \frac{g}{2}t^2 \text{ és } d = u\cdot t,$$

$$u = \frac{d}{t} = d\cdot\sqrt{\frac{g}{2h}} = 200 \text{ m/s}.$$

A lövedék ütközés előtti υ sebessége a lendület-megmaradás törvénye alapján:

$$m\upsilon = Mw + mu\,,$$

$$v = \frac{Mw + mu}{m} = 400 \text{ m/s.}$$

b)
A mechanikai energiaveszteség:

$$E_{\text{mech}\,1} = \frac{1}{2}mv^2 = 1600 \text{ J},$$

$$E_{\text{mech}\,2} = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mw^2 = 410 \text{ J},$$

$$\frac{\Delta E_{\text{mech}}}{E_{\text{mech}\,1}} = \frac{E_{\text{mech}\,2} - E_{\text{mech}\,1}}{E_{\text{mech}\,1}} = \frac{mu^2 + Mw^2 - mv^2}{mv^2} = \text{-0,74375.}$$

Tehát a mechanikai energia 74,375%-a vész el az ütközés során.

3.) Egy pici, m tömegű mágnest a sík vaslap $F_m = 4mg$ nagyságú erővel vonz. A vaslemezt megdöntjük úgy, hogy a vízszintessel 60°-os szöget zárjon be. A tetejéről v_1 sebességgel kell indítani a pici mágnest a vaslemez felső felületén, hogy éppen eljusson az aljára. Az aljáról v_2 sebességgel kell indítani, hogy éppen feljusson a tetejére. A $v_2 : v_1$ arány $\sqrt{3}$.

a) Mekkora a mágnes és a vaslemez közötti csúszási súrlódási együttható értéke?
b) Mekkora a $v_2^* : v_1^*$ arány, ha az előző folyamatok a vaslemez alsó felületén játszódnak le?

(Simon Péter, Pécs)

Megoldás:
a)
Alkalmazzuk a munkatételt a négy mozgásra:

$$\sum W = \Delta E_{\text{mozg.}},$$

$$mgh - \mu\left(4mg + mg\cos 60^\circ\right)\cdot\frac{h}{\sin 60^\circ} = -\frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$-mgh - \mu\left(4mg + mg\cos 60^\circ\right)\cdot\frac{h}{\sin 60^\circ} = -\frac{1}{2}mv_2^2,$$

$$mgh - \mu\left(4mg - mg\cos 60^\circ\right)\cdot\frac{h}{\sin 60^\circ} = -\frac{1}{2}mv_1^{*2},$$

$$-mgh - \mu\left(4mg - mg\cos 60^\circ\right)\cdot\frac{h}{\sin 60^\circ} = -\frac{1}{2}mv_2^{*2}.$$

A fenti egyenleteket egyszerűsítve és rendezve adódik a következő négy egyenlet:

$$v_1^2 = \left(\frac{9}{\sqrt{3}}\mu - 1\right)2gh, \qquad (1)$$

$$v_2^2 = \left(\frac{9}{\sqrt{3}}\mu + 1\right)2gh, \qquad (2)$$

$$v_1^{*2} = \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\mu - 1\right)2gh, \qquad (3)$$

$$v_2^{*2} = \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\mu + 1\right)2gh. \qquad (4)$$

Az (1) és (2) egyenleteket osszuk el egymással, és használjuk fel a $v_2 : v_1$ arány értékét ($\sqrt{3}$):

$$3 = \frac{\frac{9}{\sqrt{3}}\mu + 1}{\frac{9}{\sqrt{3}}\mu - 1}.$$

Ebből: $\mu = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}385$.

b)
Az (4) és (3) egyenleteket osszuk el egymással, használjuk fel a csúszási súrlódási együttható értékét:

$$\frac{v_2^{*2}}{v_1^{*2}} = \frac{\frac{7}{\sqrt{3}}\mu + 1}{\frac{7}{\sqrt{3}}\mu - 1} = \frac{23}{5},$$

$$\frac{v_2^*}{v_1^*} = \sqrt{\frac{23}{5}} \approx 2{,}14\,.$$

4.) Egy kerékpár kereke tisztán gördül a vízszintes talajon.

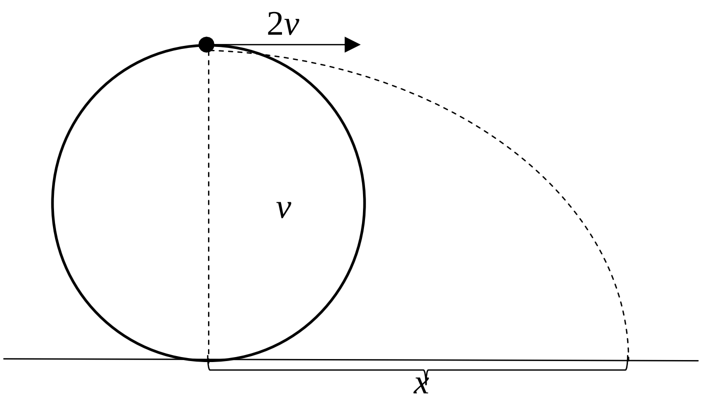
a) Mekkora v sebességgel halad egyenletesen a vizsgált kerékpár (sárvédő nélküli), ha R = 35 cm sugarú első kerekének legfelső pontjáról egy kis sárdarab válik le, majd az úttestre eső kis sárdarab éppen a keréknek ugyanarra pontjára tapad vissza, amelyikről „lerepült”?

b) Határozd meg a keréken azokat a kerületi pontokat, amelyek sebességének nagysága az úttesthez képest megegyezik a kerékpár haladási sebességének nagyságával!

A fenti kérdésekre adott válaszaidban legyen ábra, és számítás is!

(Mező Tamás, Szeged)

Megoldás:
a)
A kérdés megválaszolásához azt kell megvizsgálni, hogy a kerék legfelső pontjából $2v$ kezdősebességgel vízszintesen „elhajított” sárdarabkának a talajra érkezésig megtett vízszintes elmozdulás-komponensének nagysága (x) megegyezhet-e a kerék fél-kerületével, illetve annak páratlan számú többszörösével?



A vízszintes hajítás ideje:

$$x = 2 \cdot v \cdot t,$$

$$y = 2 \cdot R = \frac{g}{2} \cdot t^2, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{4 \cdot R}{g}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

A hajítás vízszintes elmozdulás-komponense:

$$x = 2 \cdot v \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} = 4 \cdot v \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Ennek kell a fél-kerület páratlan számú többszörösével megegyeznie:

$$x = (2 \cdot k + 1) \cdot R \cdot \pi, \quad ahol \quad k = 0,1,2,...$$

$$4 \cdot v \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} = (2 \cdot k + 1) \cdot R \cdot \pi,$$

$$v = \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \sqrt{R \cdot g} \cdot \pi}{4} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{\sqrt{R \cdot g} \cdot \pi}{4}, \quad v_2 = \frac{3 \cdot \sqrt{R \cdot g} \cdot \pi}{4},...$$

Tehát végtelen sok, jól meghatározható sebesség esetén is létrejöhet a kérdezett esemény.
A kerékpár sebességének lehetséges értékei: 5,3 km/h, 15,9 km/h, 26,4 km/h, 37,1 km/h, 47,7 km/h, 58,3 km/h.

b)
Tisztán gördülés során a kerék talajjal érintkező pontja a talajhoz képest áll, pillanatnyi forgástengely szerepet játszik. Az ettől a ponttól *R* távolságra lévő kerületi pontok sebessége a talajhoz képest: $\omega \cdot R = v$. Így a keresett pont (amiből kettő is van) a kerék középpontja, és a kerék talajjal érintkező pontja egy szabályos háromszöget alkot. A keresett pontnak két kerületi pont is megfelel, amelyhez húzott sugár a függőlegessel éppen **60 fokos szöget** zár be „hátra- és lefelé” és „előre- és lefelé” is.

Szakközépiskola 9. évfolyam

1.) A repülőtéren elhagyott csomagot találnak a biztonsági őrök. A bombaveszély miatt két kis lánctalpas távirányítós robottal közelítik meg a csomagot. A gyorsabb haladás érdekében a robotokat a repülőtéri mozgójárdára irányítják, azonban csak az egyiket sikerül olyan járdára juttatni, amely a csomag felé mozog, a másik viszont éppen ellenkezőleg. Ha a mozgójárda mozgásiránya megegyezik a robot sebességének irányával, akkor a lánctalp felső, középső pontjának sebessége a talajhoz képest 2,8 m/s. Ha a mozgójárda mozgásiránya fordított, akkor a lánctalp felső, középső pontjának sebessége már csak 2 m/s.

a) Mennyi idő alatt halad végig a két robot az 56 m hosszú futószalagon az említett esetekben?
b) Mennyi időt nyert a kedvező irányú járdán mozgó robot, illetve mennyit vesztett a rossz útra tévedt jármű ahhoz képest, mintha a folyosó mozdulatlan talaján haladtak volna?

(Kiss Miklós, Gyöngyös)

Megoldás:
a)
A nyugvó talajon haladó robot lánctalpának felső, vízszintes szakasza a robot sebességének kétszeresével halad. Ez a sebesség adódik hozzá a mozgólépcső sebességéhez. Így a középső pont sebessége egyirányú mozgás esetén: $2v + v_{\mathrm{ml}} = 2{,}8$ m/s; ellentétes mozgás esetén $2v - v_{\mathrm{ml}} = 2$ m/s. Ebből a robot sebessége v = 1,2 m/s. Így egyirányú haladás esetén a robot sebessége $v + v_{\mathrm{ml}} = 1{,}6$ m/s; szembemozgásnál $v - v_{\mathrm{ml}} = 0{,}8$ m/s.
Az 56 méteres távot ($t = s/v$) $t_1 = 35$ s, illetve $t_2 = 70$ s alatt teszi meg a két robot.

b)
A folyosó mozdulatlan talaján $t_3 = 46{,}7$ s időre lenne szükséges az 56 méteres távolság megtételéhez. Így az egyik robot 11,7 s időt nyert, a másik 23,3 s időt veszít a folyosón való mozgáshoz képest.

2.) Egy kísérletben két testet indítunk egyszerre: az egyiket a talajszintről függőlegesen felfelé 20 m/s kezdősebességgel, a másikat 60 m-rel magasabbról lefelé. Mekkora kezdősebességgel indítsuk a második testet, hogy a két test a talajtól 15 m-re találkozzon?

(Dudics Pál, Debrecen)

Megoldás:
Függőlegesen felfelé hajítás elmozdulása:

$$y = v_{01} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 15 = 20t - 5t^2 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \rightarrow (t-2)^2 = 1.$$

Az egyenlet két megoldása:
a) t_1 = 1 s; még felfelé emelkedik a test,
b) t_2 = 3 s; már visszafelé esik a test
A lefelé dobott testnek a találkozásig 45 m-t kell megtennie:

a) $45 = v_{02} \cdot t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 \rightarrow (v_{02})_1 = 40$ m/s,

b) $45 = v_{02} \cdot t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 \rightarrow (v_{02})_2 = 0$ m/s.

3.) Két diák Kérdezz! – felelek játékot játszik, miközben az úttesten egyenletesen haladó autókat figyeli. Válaszold meg a kérdéseiket te is!

a) Mi az ABS, és mi a kipörgésgátló?
b) Van-e az ilyen rendszerekkel felszerelt autó kerekének olyan kerületi pontja, amelyik sebességének nagysága az úttesthez képest megegyezik az autó sebességének nagyságával?
c) Magyarázd meg, hogy az a) kérdésben szereplő berendezések működése fizikai szempontból miért előnyös, és fontos!

A b) kérdésre adott (pozitív – vagy negatív) válaszodat részletesen (ábrát is készítve) indokold!

(Mező Tamás, Szeged)

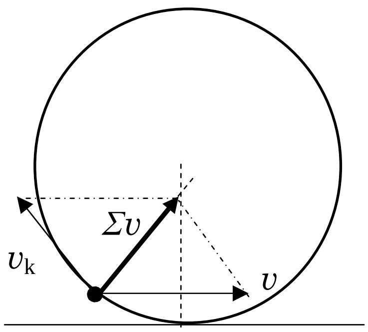
Megoldás:
a) Az ABS a modern autók alapfelszereltségébe tartozó (Anti-lock Braking System) fékezéskor működő berendezés, ami a kerekek megcsúszását hivatott megakadályozni..
A kipörgésgátló is sok korszerű gépjármű tartozéka, ez leginkább induláskor, gyorsításkor működik, és szintén a kerekek megcsúszását igyekszik megakadályozni.

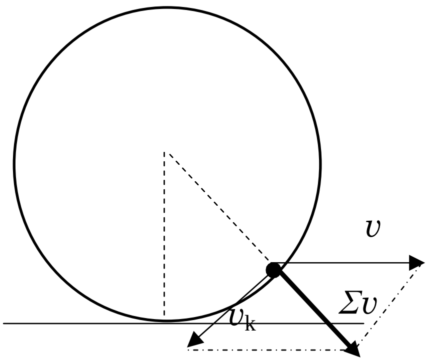
b) Az autó kerekének minden egyes pontja rendelkezik ugyanazzal a sebességgel, amivel a kocsi halad. A tengelyen kívül lévő pontjainak emellett még a tengely körüli körmozgásukból adódó kerületi sebessége is van.

Mivel {többek között az a) kérdésben szereplő eszközöknek köszönhetően} csúszásmentes a mozgás, a keréknek az alsó – a talajjal éppen érintkező – pontja minden pillanatban áll.
Ebből következik a v_k és a v (kerületi és haladómozgás sebességének) egyenlősége.

A kérdés, hogy van-e az autó kerekének olyan kerületi pontja, amelyik esetén ennek a két egymással egyenlő nagyságú sebességvektornak az összege ugyanakkora, mint maguk a vektorok?

Igen, van. Azokban a helyzetekben, amelyekben a vektori összegzés egyenlő oldalú háromszöget ad. Az ábrán is látható, hogy ez két kerületi pontban teljesül, amelyhez húzott sugár a függőlegessel éppen **30 fokos szöget** zár be „hátra- és lefelé”, és „előre-és lefelé” is.





c) Az említett eszközök a kerekek megcsúszását igyekeznek megakadályozni. Ez azért előnyös, mert a csúszási súrlódási erő mindig kisebb, mint a tapadási erő lehetséges maximális értéke. Mivel a tapadási együttható mindig nagyobb, mint a csúszási $(\mu_0 > \mu)$, és: $F_s = \mu \cdot F_{ny}$, $F_{t\,max} = \mu_0 \cdot F_{ny}$.
Így a gyorsítás és a fékezés hatékonysága nagyobb a csúszásmentes esetben, amikor a tapadási erő léphet fel.
Ez különösen fontos a fékezés esetén, ahol a fékút így rövidíthető, és ezzel a balesetek egy része elkerülhető, illetve kanyarodáskor, a kisodródást megelőzendő.

4.) Vízszintes talajon nyugvó, 800 kg/m^3 sűrűségű, 10 cm oldalélű homogén fakockát 20 g tömegű lövedék üt át a tömegközéppontján átmenő, vízszintes sebességgel. A fakocka az ütközés helyétől 2,5 méterre áll meg, a lövedék pedig 20 méterre ér talajt. A csúszási súrlódási együttható értéke a fakocka és a talaj között 0,5. Az ütközést (azaz a hasábon történő áthaladást) tekintsük pillanatszerűnek, a közegellenállást hagyjuk figyelmen kívül!

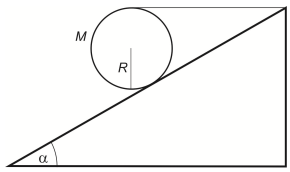
a) Mekkora volt a lövedék sebessége az ütközés előtt?
b) Hány százalékos volt a mechanikai energiaveszteség az ütközés során?

(Szkladányi András, Baja)

Megoldás: Ugyanaz, mint a Gimnázium 9. évfolyam 2. feladata.

Gimnázium 10. évfolyam

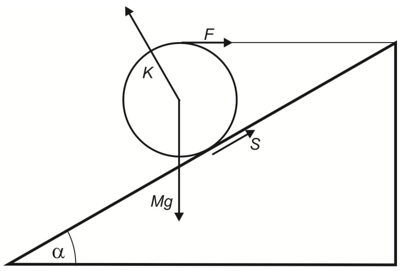
1.) Egy α = 30°-os hajlásszögű lejtőre helyeztünk egy R = 20 cm sugarú, M = 10 kg tömegű hengert, amelyet az ábra szerint vízszintes fonállal a lejtőhöz kötöttünk. Legalább mekkora legyen a henger és a lejtő között a súrlódás együtthatója, hogy a henger tartós nyugalomban maradjon?



(Holics László, Budapest)

Megoldás:

I. megoldás. *a)* A feladatnak megfelelő minimális súrlódási együtthatót keresünk, tehát amikor a tapadási súrlódás a maximális értékét veszi fel, vagyis $S = \mu K$, ahol K a lejtő által a testre ható kényszererő. A hengerre ható erőket az ábra mutatja, ahol F a fonálerő, Mg a nehézségi erő, S a súrlódási erő:



A hengerre ható erők eredője és a rá ható forgatónyomatékok összege 0. Írjuk fel az erők lejtő irányú és az arra merőleges erők összegét!

$$Mg\sin\alpha - F\cos\alpha - S = 0$$
$$K - Mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 0$$

A tapadó súrlódási erő a határesetben:

$$S = \mu K.$$

Csak a fonálerőnek és a súrlódási erőnek van forgatónyomatéka, amelyek összege 0:

$$FR - SR = 0 \quad \rightarrow \quad F = S.$$

Négy egyenletünk van négy ismeretlennel (F, S, K, μ). Figyelembe véve az utolsó két egyenletet, az első kettő így írható:

$$Mg\sin\alpha - F\cos\alpha - F = 0,$$
$$\frac{F}{\mu} - Mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 0.$$

Az elsőből:

$$F = \frac{Mg\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

amit a másodikba írva:

$$\frac{Mg\sin\alpha}{\mu(1+\cos\alpha)} - Mg\cos\alpha - \frac{Mg\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = 0\ .$$

Mg-vel egyszerűsítve, $\mu(1+\cos\alpha)-$val szorozva rendezés után:

$$\sin\alpha - \mu(1+\cos\alpha)\cos\alpha - \mu\sin^2\alpha = 0\ ,$$

innen:

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha + \cos\alpha + \sin^2\alpha} = 0{,}268\ .$$

II. megoldás. Írjuk fel a lejtő irányú erők eredőjét, figyelembe véve, hogy az S súrlódási és az F fonálerő nagysága azonos:

$$F\cos\alpha + F - Mg\sin\alpha = 0,$$

ahonnan

$$F = Mg\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = 100\ \text{N}\frac{0{,}5}{1+0{,}866} = 26{,}7949\ \text{N},$$

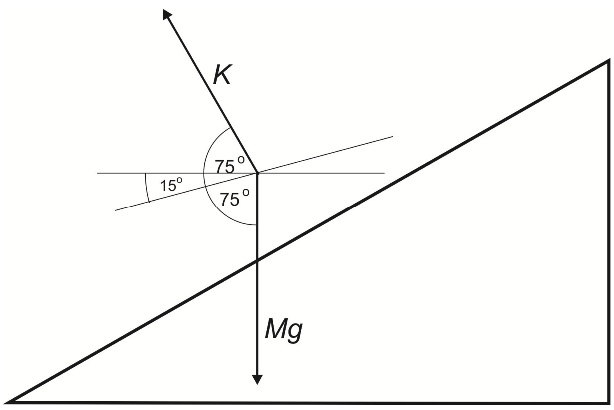
és a kényszererő:

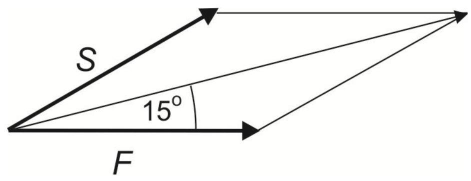
$$K = Mg\cos\alpha + F\sin\alpha = 100\ \text{N}\cdot 0{,}866 + 26{,}7949\cdot 0{,}5 = 100\ \text{N}. \quad (K = Mg\ !)$$

A súrlódási együttható innen ($S = F$ figyelembe vételével):

$$\mu = \frac{S}{K} = \frac{F}{K} = \frac{26{,}7949}{100} = 0{,}267949 \approx \mathbf{0{,}268}.$$

III. megoldás. Felhasználva a fonálerő és súrlódási erő nagyságának egyenlőségét, az ábra alapján eredőjük iránya a vízszintessel $\beta = 15^\circ$-os szöget zár be. Az erők eredőjének zérus volta csak úgy lehetséges, hogy ha a kényszererő és nehézségi erő eredője is ugyanekkora szöget zár be a vízszintessel (vagyis egy egyenesbe esik a fonál- és a súrlódási erők eredőjének hatásvonalával).
Vegyük észre, hogy a K és Mg erők által bezárt szög 150°, amelynek a fele éppen 75°. A két erő eredőjének iránya akkor lehet a vízszinteshez viszonyítva 15°, ha 90°-ból kivonva a 75°-ot, éppen 15° hajlásszöget kapok. Ez pedig az ábra szerint fennáll. Látható, hogy ez csak akkor lehetséges, ha $Mg = K$-val.
Az előző megoldásból felhasználva S értékét, a súrlódási együtthatóra 0,268-et kapunk.





2.) Egy test egyenes pályán, síkos jégen, vízszintes síkban súrlódásmentesen 15 m/s sebességgel halad. A test két részből áll, amelyek közül az egyik 2 kg, a másik 3 kg tömegű. A két rész úgy van összekötve, hogy közöttük egy elhanyagolható tömegű, összenyomott rugó található. Amikor az összekötés elszakad, akkor a rugó a mozgásirányra merőleges irányban löki szét a testeket. A szétlökődés után a 2 kg tömegű test mozgásiránya 30 fokos szöget zár be az eredeti mozgásiránnyal.

a) Mekkora szöget zár be a másik darab mozgásiránya az eredeti sebesség irányával?
b) Mekkora az egyes darabok lendülete?
c) Határozzuk meg, hogy mekkora rugalmas energia tárolódott a rugóban!

(Wiedemann László, Budapest)

Megoldás:
a)
A belső erők az összes lendületet nem változtatják meg, tehát a szétlökődés után is az eredeti mozgásirányra merőleges irányban az összes lendülete nulla.

Az első rész mozgásirányra merőleges lendülete: $\mathrm{tg}30^\circ = \dfrac{I_{1y}}{I_{1x}} \to I_{1y} = I_{1x} \cdot tg30^\circ$.

A másik részre hasonlóan: $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{I_{2y}}{I_{2x}} \to I_{2y} = I_{2x} \cdot tg\beta$.

A mozgásirányra merőleges lendületkomponensek egyenlők a szétlökődés után:

$$I_1 \cdot \mathrm{tg}30^\circ = I_2 \cdot \mathrm{tg}\beta \to \mathrm{tg}\beta = \frac{I_1}{I_2} \cdot \mathrm{tg}30^\circ = \frac{m_1 v}{m_2 v} \cdot \mathrm{tg}30^\circ = 0{,}3849 \to \beta = 21^\circ .$$

b)
Az egyes részek lendülete és sebessége a szétlökődés után:

$$I_1 = \frac{I_{1x}}{\cos\alpha} = 34{,}64 \text{ kgm/s}, \ v_1^{/} = \frac{I_1}{m_1} = 17{,}3 \text{ m/s},$$

$$I_2 = \frac{I_{2x}}{\cos\beta} = 48{,}2 \text{ kgm/s}, \ v_2^{/} = \frac{I_2}{m_2} = 16{,}06 \text{ m/s}.$$

c)
A szétlökődés előtti és utáni teljes kinetikus energia:

$$E_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_x^2 = 562{,}5 \text{ J}, \ E_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^{/2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{/2} = 686{,}2 \text{ J}.$$

A szétlökődés során az összes mechanikai energia nem változik

A rugóban tárolt potenciális energia: $E_{\mathrm{pot}} = E_2 - E_1 = 123{,}7$ J.

3.) Az 1. ábrán látható vékony, bal oldali végén zárt csövet függőleges síkban tartjuk. A cső $L = 47{,}5$ cm hosszúságú szárai a vízszintessel 30°-os szöget zárnak be. A nyitott végén keresztül olyan lassan öntünk higanyt a csőbe, hogy az a falon le tud csorogni, tehát csak a bal oldali csőben lévő L hosszúságú levegőoszlopot zárja el a külvilágtól. A külső légnyomás 76 Hgcm (76 cm magas higanyoszlop nyomásával egyenlő), a hőmérséklet 20 °C.

a) Milyen hosszú lesz a higanyszál által bezárt levegőoszlop?

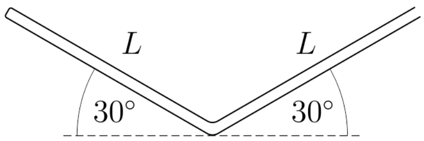
Ezt követően a csövet függőleges síkban óvatosan úgy forgatjuk el, hogy ne ömöljön ki belőle higany, és a zárt végű szára vízszintes helyzetbe kerüljön (2. ábra).

b) Milyen hosszú lesz ekkor a higanyszál által bezárt levegőoszlop?

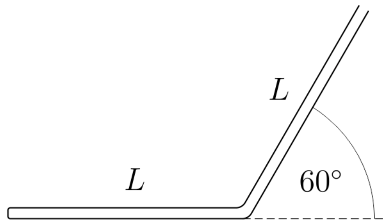
c) Mekkora hőmérsékletre kell melegíteni ebben a helyzetben a bezárt levegőt ahhoz, hogy a higanyszál felső vége ismét a cső nyitott végéhez kerüljön?

A higanygőz nyomásától és a kapilláris nyomástól, valamint a higany hőtágulásától eltekinthetünk.

1. ábra



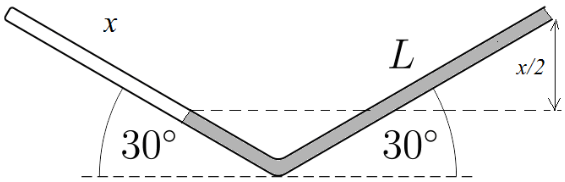
2. ábra

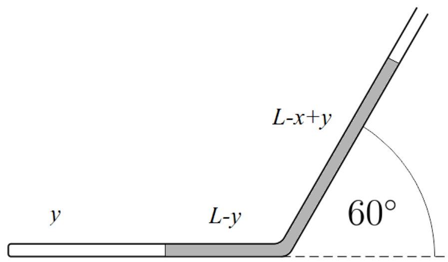


(Szkladányi András, Baja)

Megoldás:

a) A lecsorgó higany a cső alján lezárja a bal oldali csőszakaszban lévő levegőt, amelynek nyomása kezdetben megegyezett a külső légnyomással, majd izoterm folyamat során összenyomja.





Amikor a jobb oldali csődarab megtelik higannyal, az x hosszúságú bezárt levegőoszlop p_1 nyomása (a nyomások Hgcm egységben értendők):

$$p_1 = p_0 + \frac{x}{2}.$$

Alkalmazzuk a Boyle-Mariotte törvényt az összenyomódó levegőre:

$$p_0 LA = \left(p_0 + \frac{x}{2}\right)xA\,,$$

$$x^2 + 2p_0 x - 2p_0 L = 0\,,$$

$$x = -p_0 + \sqrt{p_0^2 + 2p_0 L} = 38 \text{ cm}\,.$$

(A másik megoldás negatív, tehát fizikai szempontból nem lehetséges.)

b) Az elforgatás közben szintén állandó hőmérsékleten zajlik a bezárt levegő további összenyomása. A folyamat végén az y hosszúságú bezárt levegőoszlop p_2 nyomása:

$$p_2 = p_0 + \frac{\sqrt{3}(L - x + y)}{2}.$$

Alkalmazzuk újra a Boyle-Mariotte törvényt:

$$p_0 LA = \left(p_0 + \frac{\sqrt{3}(L - x + y)}{2}\right)yA\,.$$

Egyszerűsítés után érdemes az adatokat behelyettesíteni (Hgcm és cm egységekben):

$$76\cdot 47{,}5=\left(79+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(47{,}5-38+y\right)\right)\cdot y\ .$$

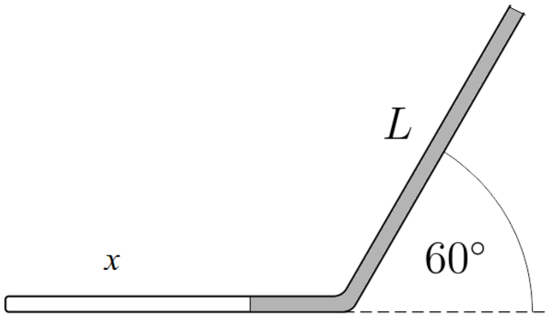
Átalakítások után a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y^2+\left(76+4{,}75\cdot\sqrt{3}\right)\cdot y-3610=0\ .$$

Az egyenlet fizikailag is értelmes megoldása y = 32,2 cm.

c) A melegítés után a bezárt levegőoszlop hossza ismét x, nyomása pedig:

$$p_2=p_0+\frac{\sqrt{3}}{2}L\ .$$



Továbbra is az eredeti állapottal összehasonlítva alkalmazhatjuk az egyesített gáztörvényt:

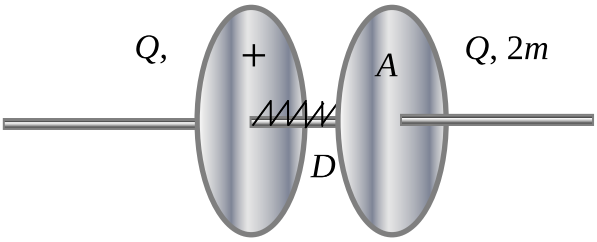
$$\frac{p_0 LA}{T_0}=\frac{\left(p_0+\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)xA}{T}\ .$$

A bezárt levegőt tehát T = 361 K = 88 °C hőmérsékletre kell melegíteni.

4.) Vízszintes, vékony szigetelő rúdon két, a rúdra merőleges, egyforma méretű, de nem egyforma tömegű, szigetelő anyagból készült, elhanyagolható vastagságú, kör keresztmetszetű sík lap súrlódás nélkül mozoghat. A lapokat a rúd a tömegközéppontjukban döfi át, és egy eredetileg nyújtatlan, szigetelőből készült rugó köti őket össze a rúddal párhuzamosan. A lapok közötti távolság sokkal kisebb, mint a körlapok sugara. A lapokat egyenletesen pozitív töltéssel feltöltjük, és a rendszert légüres térben magára hagyjuk.

a) Mekkora a maximális sebesség kialakulásakor a rugó megnyúlása, és az egyes lapok elmozdulása?
b) Mekkora lesz a lapok maximális sebessége?
c) Milyen energia csökkenése fedezi a mechanikai energiák növekedését? Paraméteres számolással igazold, a maximális sebesség kialakulásának folyamatára érvényes az energia megmaradásának törvénye!
(A szórt mezőtől és minden veszteségtől tekints el!)

Adatok: mindkét lap töltése $Q=\sqrt{6\cdot 10^{-3}\mathrm{Nm}^2\cdot\varepsilon_0}$ C, a bal oldali lap tömege m = 150 g, a jobb oldali lap tömege pedig $2m$, a lapok felülete $A = 4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$, a rugóállandó D = 2,5 N/m.



(Koncz Károly, Pécs)

Megoldás:

a) A $v_{\max.}$, ha az erők eredője zérus: $D \cdot \Delta l = E_+ \cdot Q$,

$$D\Delta l = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A},$$

$$\Delta l = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 AD} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

A tömegközéppont helyben maradása miatt: $\Delta x_j = \frac{\Delta l}{3} = 10^{-2}$ m, $\Delta x_b = \frac{2\Delta l}{3} = 2 \cdot 10^{-2}$ m.

b) $$\sum W = \Delta E_{kin},$$

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \cdot \Delta x_j - \frac{D\Delta l}{2} \cdot \Delta x_j = \frac{1}{2} 2mv^2 .$$

Az előző egyenletek alapján:

$$D\Delta l \Delta x_j - \frac{D\Delta l}{2} \Delta x_j = \frac{1}{2} 2mv^2 ,$$

$$\frac{D\Delta l}{2} \cdot \Delta x_j = \frac{1}{2} 2mv^2 ,$$

$$\Delta x_j \sqrt{\frac{3D}{2m}} = v_j ,$$

$$v_j = 5 \text{ cm/s.}$$

Mivel a folyamatban: $\sum I = \text{áll.}$,

$$v_b = 10 \text{ cm/s.}$$

c) Az elektrosztatikus mező energiájának csökkenése fedezi a mechanikai energiák növekedését.

$$\Delta E_{mech} = \frac{1}{2} D(\Delta l)^2 + \frac{1}{2} 2mv_j^2 + \frac{1}{2} m4v_j^2 ,$$

$$\Delta E_{mech} = \frac{1}{2} D(\Delta l)^2 + \frac{1}{2} 6mv_j^2 ,$$

$$\Delta E_{mech} = \frac{1}{2} D(\Delta l)^2 + \frac{1}{2} 6m\left(\frac{\Delta l}{3}\sqrt{\frac{3D}{2m}}\right)^2 ,$$

$$\Delta E_{mech} = D(\Delta l)^2 .$$

A mezőt figyelve:

$$\Delta E_{mező} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 A}\right)^2 \Delta l \cdot A ,$$

$$\Delta E_{mező} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} \Delta l ,$$

$$\Delta E_{mező} = \frac{1}{2} 2D\Delta l \Delta l = D(\Delta l)^2 .$$

Szakközépiskola 10. évfolyam

1.) Adott pillanatban egy toronyból elejtünk egy kisméretű, rugalmas golyót. Egy kis idő múlva a toronyból leejtünk egy másik golyót is. Az első golyó t_0 = 2 s idő alatt éri el a vízszintes talajt, és onnan visszapattan. Ezután a golyók először pontosan az indítási hely és a talaj közötti távolság felénél találkoznak. A légellenállás elhanyagolható. Mennyi idő telt el a két golyó leejtése között?

(Kotek László, Pécs)

Megoldás:

Legyen a torony magassága h! Az első golyó t_1 idő alatt pattan fel a $h/2$ magasságig, a második golyó pedig t_2 idő alatt süllyed le a $h/2$ magasságig. A keresett Δt idő:

$$\Delta t = t_0 + t_1 - t_2.$$

A golyók sebessége a találkozás pillanatában az energia-megmaradás miatt azonos. Legyen ez υ_1! A sebességekre igaz:

$$\upsilon_1 = g t_2,$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - g t_1,$$

$$\upsilon_0 = g t_0.$$

Ezekből:

$$g t_2 = g t_0 - g t_1,$$

$$t_1 = t_0 - t_2.$$

A keresett Δt idő:

$$\Delta t = t_0 + t_0 - t_2 - t_2,$$

$$\Delta t = 2 \cdot (t_0 - t_2).$$

A szabadesés út-idő összefüggése szerint:

$$h = \frac{g}{2} t_0^2,$$

$$\frac{h}{2} = \frac{g}{2} t_2^2.$$

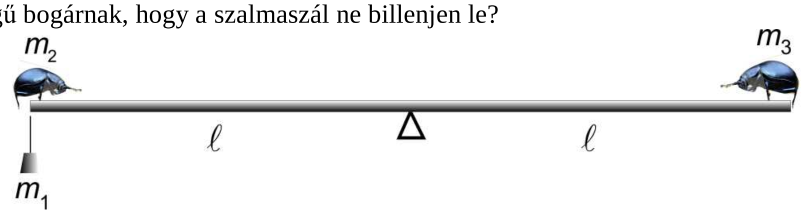
Ezekből: $$t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} t_0.$$

A két golyó leejtése között eltelt idő:

$$\Delta t = 2 \cdot \left(t_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} t_0 \right),$$

$$\boxed{\Delta t = \left(2 - \sqrt{2}\right) t_0 \approx 1{,}17\ \text{s}}$$

2.) Egy gondosan kiegyensúlyozott, középen ékkel alátámasztott $2l$ hosszúságú szalmaszál két végén egy-egy bogár helyezkedik el. Az egyik végén még egy m_1 = 1 g tömegű pontszerű nehezék is függ, az ezen a végén lévő bogár tömege m_2 = 2 g, a másik végén lévőé m_3 = 3 g. Az m_3 tömegű bogár egy adott pillanatban v_3 = 5 cm/s állandó sebességgel mászni kezd a szalmaszál közepe felé. Mekkora sebességgel kell másznia a felborulástól megijedt m_2 tömegű bogárnak, hogy a szalmaszál ne billenjen le?



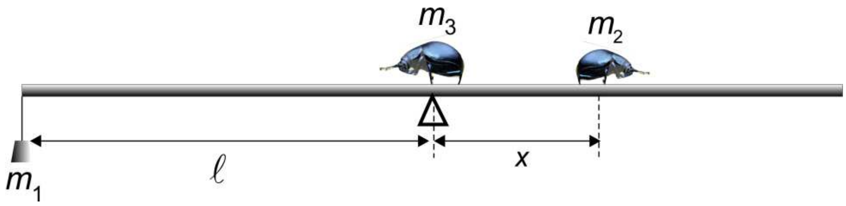
(Holics László, Budapest)

Megoldás:

I. Megoldás. A szalmaszál akkor nem billen le, ha a nehezék és a két bogár alátámasztásra vonatkozó forgatónyomaték-összege zérus (a bal oldali forgatónyomatékok összege egyenlő a jobb oldali forgatónyomatékkal). Ha feltételezzük, hogy létezik olyan állandó v_2 sebesség, amelyre minden pillanatban előáll a forgatónyomaték-egyensúly, akkor legegyszerűbben juthatunk a megoldáshoz, ha a nehezebb bogárnak a szalmaszál közepéig tartó mozgását vesszük figyelembe. Az ehhez szükséges idő:

$$t = \frac{\ell}{v_{\mathrm{m3}}} = \frac{20\ \mathrm{cm}}{5\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}} = 4\ \mathrm{s}.$$

Ekkor az egyensúlyhoz csak a nehezék és a kisebb bogár nyomatékait kell figyelembe venni. Ebben az esetben azonban a kis bogárnak már (átmászva a nagyobbikon) a túloldalon kell lennie, mire a nagy a szál közepére ér. A túloldali x távolságra:



$$m_2 g x = m_1 g \ell,$$

ahonnan

$$x = \frac{m_1}{m_2}\ell = \frac{1\ \mathrm{g}}{2\ \mathrm{g}} 20\ \mathrm{cm} = 10\ \mathrm{cm}.$$

A kis bogárnak tehát

$$s = \ell + x = 20\ \mathrm{cm} + 10\ \mathrm{cm} = 30\ \mathrm{cm}$$

utat kell megtennie 4 s alatt. Hogy ne billenjen fel a szalmaszál, a bogár sebessége

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{\ell + x}{t} = \frac{30\ \mathrm{cm}}{4\ \mathrm{s}} = \mathbf{7{,}5\,\frac{cm}{s}}$$

kell legyen.

II. Megoldás. Általánosan: a mindenkori egyensúlyra

$$m_1 g \ell + m_2 g\left(\ell - v_{\mathrm{m}} t\right) = m_3 g\left(\ell - v_{\mathrm{M}} t\right).$$

Egyszerűsítés és rendezés után:

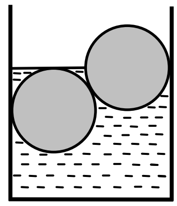
$$m_1 \ell + m_2\left(\ell - v_{\mathrm{m}} t\right) = m_3\left(\ell - v_{\mathrm{M}} t\right),$$

$$m_1\ell + m_2\ell - m_2 v_{\mathrm{m}} t = m_3 \ell - m_3 v_{\mathrm{M}} t \qquad \rightarrow \qquad m_1\ell + m_2\ell - m_3\ell = m_2 v_{\mathrm{m}} t - m_3 v_{\mathrm{M}} t.$$

A bal oldal összege 0, tehát az idő kiesik, és minden pillanatban érvényes, hogy

$$m_3 v_M t = m_2 v_m t \ \rightarrow\ m_3 v_M = m_2 v_m \ \rightarrow\ v_m = \frac{m_3}{m_2} v_M = \frac{3\ \mathrm{g}}{2\ \mathrm{g}} \cdot 5\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 7{,}5\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

3.) Egy függőleges, vizet tartalmazó csatornában két, egyenként m = 45 kg tömegű, henger alakú farönk található. Méretük és anyagi minőségük azonos, egymással és a csatorna falával érintkeznek. Az egyiket éppen ellepi a víz, a másik félig merül be a vízbe. A súrlódás mindenhol elhanyagolható. Mekkora erőkkel nyomják a farönkök a függőleges falakat?

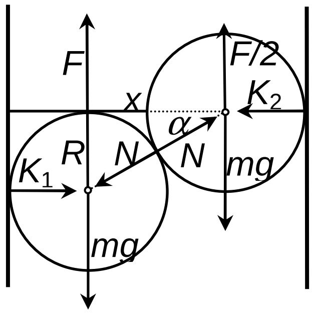


(Kotek László, Pécs)

Megoldás:

Legyen a teljesen bemerülő farönkre ható felhajtóerő F, a fal által kifejtett nyomóerő K_1, a másik rönk által kifejtett erő N, a másik rönkre a fal által kifejtett nyomóerő K_2!

Írjuk fel mindkét rönkre a vízszintes és függőleges irányú erők egyensúlyi feltételeit!



(1) $$K_1 - N\cos\alpha = 0,$$

(2) $$F - N\sin\alpha - mg = 0,$$

(3) $$K_2 - N\cos\alpha = 0,$$

(4) $$\frac{F}{2} + N\sin\alpha - mg = 0.$$

Könnyen látható, hogy

$$K_1 = K_2 = N\cos\alpha.$$

(2) és (4)-ből:

$$N\sin\alpha + mg = 2mg - 2N\sin\alpha,$$

$$N = \frac{mg}{3\sin\alpha}.$$

$$K_1 = K_2 = \frac{1}{3}mg\cdot\mathrm{ctg}\alpha.$$

Az ábra alapján:

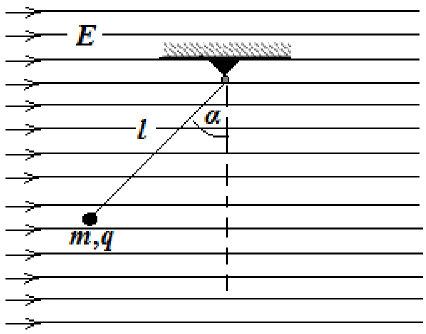
$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{3}R}{R} = \sqrt{3}.$$

A farönkök által a falakra kifejtett azonos erők:

$$\boxed{K_1 = K_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}mg = 150\sqrt{3}\ \mathrm{N}.}$$

4. Egy l = 32 cm hosszúságú inga lengéseit vizsgáljuk. A gravitációs mezőn kívül egy vízszintes irányú, homogén elektromos mező is jelen van. Az elektromos térerősség nagysága E, a pontszerűnek tekinthető ingatest tömege m = 24 g, elektromos töltése $q > 0$. Fennáll továbbá, hogy $qE = mg$.

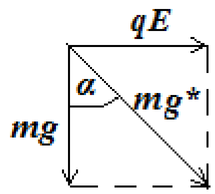
a) Az inga melyik helyzetében lesz az ingatest sebessége a legnagyobb?
b) Mekkora az ingatest legnagyobb sebessége?
c) Mekkora erő ébred ekkor a fonálban?



(Zsigri Ferenc, Budapest)

Megoldás:

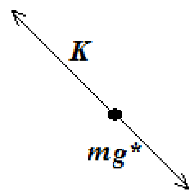
Az ingatest bármely helyzetében hat rá a lefele mutató mg nehézségi erő, és a vízszintesen jobbra mutató qE elektromos erő. Ezek eredője qE = mg miatt $mg \cdot \sqrt{2} = mg^*$ nagyságú, és (az ábra szerint) a függőlegessel α=45°-os szöget bezáró irányú, tehát az inga fonalának eredeti irányára merőleges. Olyan a helyzet, mintha a gravitációs gyorsulás az említett irányú, és $g^* = g \cdot \sqrt{2}$ nagyságú lenne.



a)
Az ingatest sebessége abban a helyzetben lesz a legnagyobb, amikor az inga fonala párhuzamos lesz mg^*-gal, azaz 90°-os elfordulás után, amikor a függőlegessel ismét 45°-ot zár be az inga.

b)
Alkalmazzuk a munkatételt az indulástól a legnagyobb sebességű helyzetig. Az „új” gravitációs tér is konzervatív. Az irányába történő elmozdulás l.

$$mg^* l = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \rightarrow v_{\max} = \sqrt{2g^* l} = \sqrt{2\sqrt{2}gl} = 3\,\text{m/s}.$$



c)
Ebben a helyzetben írjuk fel a mozgásegyenletet: $K - mg^* = ma_{cp}$.

Itt K jelöli a fonálerőt. Ebből: $K = m\left(a_{cp} + g^*\right)$.

$$K = m\left(a_{\text{cp}} + g^*\right) = m\left(\frac{v_{\max}^2}{l} + g^*\right) = m(2\sqrt{2}g + \sqrt{2}g) = mg\left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = \left(3 \cdot \sqrt{2}\right)mg \approx 1\ \text{N}.$$