33. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS KÖZÉPISKOLAI TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY
HARMADIK FORDULÓ
9. osztály Gyöngyös, 2014. május 4-6.

Megoldások

Gimnázium

1. Egy adott pillanatban két műhold halad el egymás mellett. Az elhaladás pillanatában sebességük merőleges a Földet a műholdakkal összekötő egyenesre. A találkozás pillanatában távolságuk a Földtől 150 000 km. Az egyik műhold keringési ideje 5 nap, a másiké 8 nap.

a) Mekkora a műholdaknak a maximális és a minimális távolsága a Földtől?

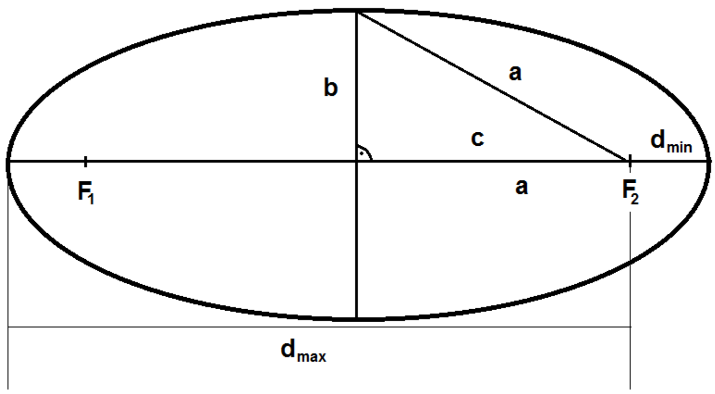
b) Milyen távol vannak a Földtől, amikor sebességük éppen párhuzamos azzal az egyenessel, amely a találkozás pillanatában összekötötte a műholdakat a Földdel.

c) Leghamarabb mennyi idő múlva lesz a két műhold a legtávolabb egymástól? Mekkora ez a távolság?

(A műholdak tömege jelentéktelen. A Hold 27,322 nap alatt kerüli meg a Földet, átlagos távolsága a Földtől 384 400 km.)

(Kiss Miklós)

Megoldás:
A kis tömegű műholdak Kepler első törvénye szerint ellipszis pályán keringenek a Föld körül. A Hold a Föld- Hold rendszer tömegközéppontja körül kering ellipszis pályán. Becslésként úgy vesszük, mintha a Hold Föld körül keringene. Ezzel a hiba kisebb, mint 1,3% (1/82 rész).



Az ellipszis adatai közötti összefüggések:

$d_{\min} = a - c$, ebből $c = a - d_{\min}$

$d_{\max} = a + c$, ebből és az előzőből $d_{\max} - d_{\min} = 2c$, illetve

$$d_{\max} + d_{\min} = 2a$$

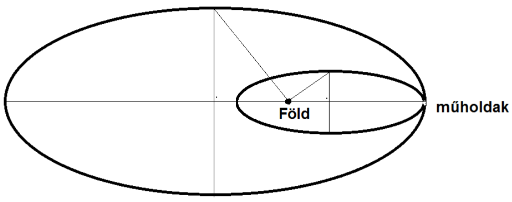
A megadott keringési időkből és a Hold pálya adatai alapján a műholdak pályájának nagytengelye Kepler III. törvényéből számolható:

$$\frac{a^3}{a_H^3} = \frac{T^2}{T_H^2} \qquad \rightarrow \qquad a = \sqrt[3]{a_H^3 \cdot \left(\frac{T}{T_H}\right)^2}$$

Ezt alkalmazva a két műholdra és a Holdra adódnak a nagytengelyek értékei:

$$a_{\mathrm{I}} = 123\,905\,\mathrm{km}, \quad \text{illetve} \quad a_{\mathrm{II}} = 169\,499\,\mathrm{km}.$$

a) Ebből és a kiindulási távolságból ($R = 150000\,\mathrm{km}$) látható, hogy találkozásukkor, az első műhold pályáján Földtávolban, a második pályáján Földközelben van.



Ezek alapján az *első* műhold maximális távolsága

$$d_{\max} = a_1 + c_1 = 150000\,\mathrm{km},$$

a minimális távolsága

$$d_{\min} = a_1 - c_1 = 2a_1 - R = 97810\,\mathrm{km}.$$

A második műhold minimális távolsága

$$d_{\min} = a_2 - c_2 = 150000\,\mathrm{km},$$

a maximális távolság

$$d_{\max} = a_2 + c_2 = 2a_2 - R = 188999\,\mathrm{km}.$$

(Az ábra nem méretarányos!)

b) A távolságok megegyeznek a pályák fél nagytengelyének hosszával, azaz az átlagos távolsággal, tehát az első műhold **123 905 km**, a második **169 999 km** távol lesz a Földtől.

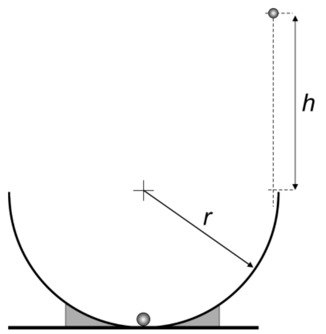
c) A két műhold legközelebb **40 nap** múlva halad el egymás mellet. Legtávolabb akkor lesznek, amikor az első műhold visszatér a találkozás helyére, míg a második éppen pályája ellentétes pontjában lesz (mindkettő Földtávolban). Ez húsz nap múlva fog bekövetkezni. Ugyanis az első műhold 5 naponta visszatér, a második műhold a találkozás után négy nappal az ellentétes pontban lesz, aztán találkozástól számítva **12 nap** múlva, **20 nap** múlva stb. lesz az ellentétes pontban.
Ekkor a távolságuk:

$$d = d_{\mathrm{I\,max}} + d_{\mathrm{II\,max}} = \mathbf{286809\ km.}$$

Az adatok és eredmények táblázata:

Alap	T	a	d_{min}	d_{max}	c	b
Hold	*27,32*	*384 400*	*363 104*	*405 696*	*21 296*	*383 810*
I.	*5,00*	*123 905*	*97810*	*150 000*	*36095*	*118531*
II.	*8,00*	*169 499*	*150 000*	*188 999*	*19 499*	*168 374*
max. táv	*286809*					

2. Egy *r* sugarú, rögzített félgömbfelület pereme felett *h* magasságban egy kisméretű testet tartottunk, majd elengedtük. Ezt követően a félgömb aljában centrálisan és tökéletesen rugalmasan ütközött egy másik kisméretű testtel. Ezután mindkét test a félgömb pereméig emelkedett. (A súrlódást és a közegellenállást hagyjuk figyelmen kívül!) Mekkora volt *h* értéke? *(Suhajda János)*



Megoldás.

Az ütközést megelőző folyamatra felírható:

$$m_1 g\left(h+r\right) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2, \quad \text{innen} \quad v_1 = \sqrt{2g\left(h+r\right)} \tag{1}$$

A rugalmas ütközésre felírható a lendület-megmaradás és a mechanikai energia-megmaradás törvénye:

$$m_1 v_1 = -m_1 u + m_2 u \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2, \tag{3}$$

ugyanis, ha a félgömb aljáról mindkét test a félgömb pereméig csúszik, szétpattanáskor az ütközés utáni kezdősebességüknek meg kell egyezniük.

A (2) és (3) egyenletekből meghatározható a két test tömegének aránya, ahonnan:

$$m_2 = 3m_1. \tag{4}$$

Osszuk el ui. a (2) és (3) egyenleteket m_1-gyel, majd jelöljük az m_2/m_1 arányt k-val:

$$v_1 = -u + ku$$
$$v_1^2 = u^2 + ku^2.$$

Az elsőt négyzetre emelve és a sebességnégyzet két kifejezését téve:

$$u^2 - 2ku^2 + u^2 = u^2 + ku^2.$$

Minden tagot u^2-tel osztva:

$$1 - 2k + k^2 = 1 + k,$$

ahonnan $k = 3$.

A mechanikai energia megmaradásának törvényét most a kezdő- és végállapotra írjuk fel, mindegyikben pillanatnyi nyugalomban vannak a testek, azaz a mozgási energia zérus. A helyzeti energia 0-szintjét vegyük a félgömb aljánál:

$$m_1 g\left(h + r\right) = m_1 gr + m_2 gr \tag{5}$$

Felhasználva (4)-et ez (g-vel való egyszerűsítés után) így írható:

$$h + r = r + 3r,$$

ahonnan a félgömb peremétől számított indítási magasság

$$h = \mathbf{3}\boldsymbol{r}.$$

Ilyen magasból kellett leejteni a testet.

3. Egy kilövő szerkezetből függőlegesen felfelé v_0 = 60 m/s sebességgel kilőtt 18 kg tömegű robbanó lövedék pályájának felszálló ága félmagasságában két darabra robbant szét. Ennek következtében az M = 12 kg-os darab a pálya egyenesére merőleges, I = 120 Ns nagyságú impulzust (lendületet) kapott. Milyen távol lesznek egymástól a darabok, amikor mindkét rész a talajba csapódik?
(A légellenállástól tekintsünk el.) *(Holics László)*

Megoldás. A jelenség akkor írható le a legkönnyebben, ha beülünk a lövedék tömegközéppontjával együtt mozgó koordinátarendszerbe. Ekkor szétrobbanás után is változatlanul függőleges hajításnak megfelelő mozgást végez rendszerünk, mert vízszintes erő hiányában a rendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha nem robbant volna szét a lövedék. Mivel a robbanáskor vízszintes lendületet kapott az M tömegű rész a másik, m tömegű résztől (és ugyanekkora, ellentétes irányút az m tömegű M tömegűtől), mindkét repesz és a tömegközéppont is egyaránt azonos g gyorsulással emelkedik, majd esik (szabad mozgást végeznek a gravitációs mezőben), ezért *egymáshoz képest* nem gyorsulnak, azaz *ebben a koordinátarendszerben egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.*

A talajról nézve a függőleges hajítás csak annyiban érdekes, hogy a pálya magasságát és az időadatokat meg tudjuk határozni belőle.

A lendület megmaradása a (pillanatszerű) robbanás után:

$$m v_x = M V_x = I_x,$$

innen egyrészt a nagyobbik darab sebessége:

$$M V_x = I_x \quad \rightarrow \quad V_x = \frac{I_x}{M} = \frac{120\ \text{Ns}}{12\ \text{kg}} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

másrészt a kisebbik repesz sebessége:

$$v_x = \frac{M}{m} V_x = \frac{12\ \text{kg}}{18\ \text{kg} - 12\ \text{kg}} 10\frac{\text{m}}{\text{s}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Együtt mozgó koordinátarendszerünkben tehát egyenes vonalú egyenletes mozgással távolodnak egymástól a darabok, és Δt idő múlva

$$d = \left(v_x + V_x\right)\Delta t$$

messzire kerülnek. Meghatározandó tehát a t idő. Itt már *a talajhoz rögzített rendszerből* kaphatjuk meg a szükséges adatokat. A tömegközéppont és a szilánkok hajítási ideje megegyezik. (Ez utóbbiak „ferde hajítást” végeznek, ez azonban nem érint minket.) A *függőleges hajítás* teljes ideje:

$$T_{haj} = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\cdot 60\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 12\ s.$$

A szétrobbanásig (a pálya félmagasságáig) eltelt időt megadó egyenlet:

$$\frac{h_{max}}{2} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

ahol az emelkedés magassága: $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}.$

Ezzel egyenletünk az időre: $\frac{v_0^2}{4g} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$

Rendezve: $\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + \frac{v_0^2}{4g} = 0 \quad \rightarrow \quad g t^2 - 2v_0 t + \frac{v_0^2}{2g} = 0.$

Numerikusan: $$10\,\frac{m}{s^2}\,t^2 - 2\cdot 60\,\frac{m}{s}\,t + \frac{3600\,\frac{m^2}{s^2}}{2\cdot 10\,\frac{m}{s^2}} = 0,$$

dimenziók nélkül: $10t^2 - 120\cdot t + 180 = 0.$

Ennek megoldása:

$$t = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4\cdot 10\cdot 180}}{20} = \begin{matrix} 10{,}24\ s \\ 1{,}757\ s \end{matrix}.$$

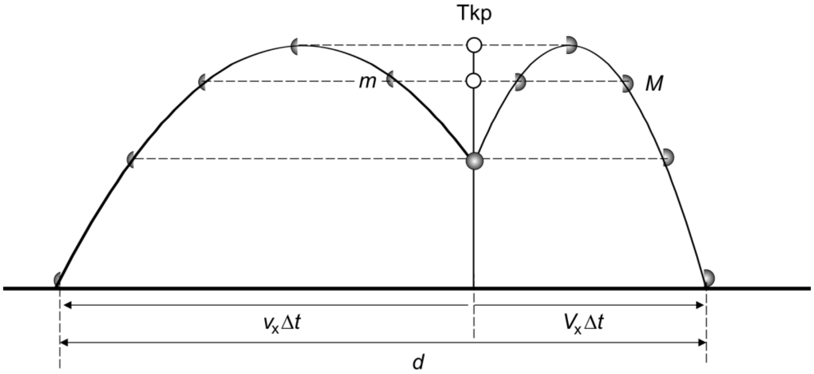
A nagyobbik adat a *leszálló ág* félmagasságáig eltelt időt, a kisebbik a *felszálló ágét* jelenti.
A *robbanástól a talajra érkezésig* eltelt idő tehát:

$$\Delta t = T_{haj} - t = 12\ s - 1{,}747\ s = 10{,}24\ s.$$

A robbanástól számítva ennyi idő alatt érnek (egyszerre) a részek a talajra, ennyi idő alatt egymástól

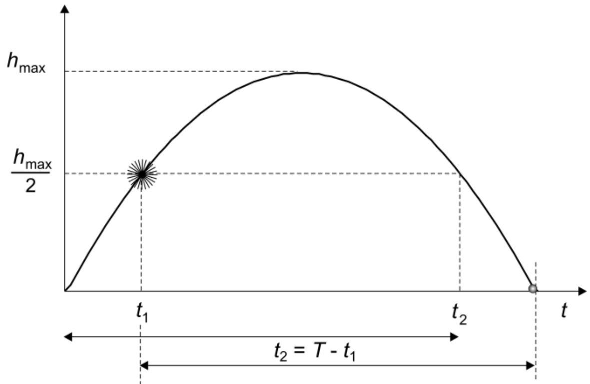
$$d = \left(v_x + V_x\right)\Delta t = \left(10\,\frac{m}{s} + 20\,\frac{m}{s}\right)\cdot 10{,}24\ s = \mathbf{307{,}2\,m}$$

távolságra kerültek.

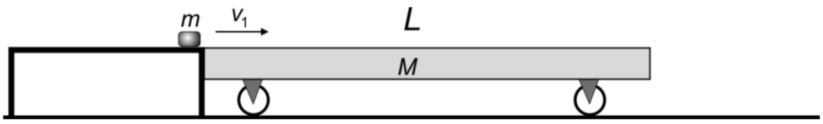


A tényleges mozgás a talajról nézve

A végeredményt sokkal egyszerűbben is megkaphatjuk! Az emelkedési magasság meghatározása is feleslegessé válik, ha észrevesszük, hogy a függőleges hajítás magasságának az idő függvényében megrajzolt képe szimmetrikus! A legutolsó másodfokú egyenlet két megoldása közül a nagyobbik közvetlenül megadja *a robbanástól a talajra érésig eltelt időt!* Ui., mint az ábra mutatja, a *kilövéstől* a leszálló ág félmagasságáig eltelt idő (a megoldás nagyobbik értéke) éppen a robbanástól a földet érésig eltelt idővel egyenlő, tehát az egyenlet nagyobbik értékű megoldása az a keresett idő, amivel a relatív sebességet szoroznunk kell, hogy a repeszek közti távolságot megkapjuk!



4. Valamely, vízszintes síkon nyugvó M tömegű, könnyen gördülő kiskocsi platójára v_1 sebességgel rácsúszik egy m tömegű, elhanyagolható méretű test az ábra szerint. A két test között μ tényezőjű súrlódás lép fel. Minimálisan mekkora legyen a kiskocsi L hossza, hogy a test azon még megálljon?
(Adatok: M = 50 kg; m = 10 kg; v_1 = 6 m/s; μ = 0,7.)



(Dr. Wiedemann László)

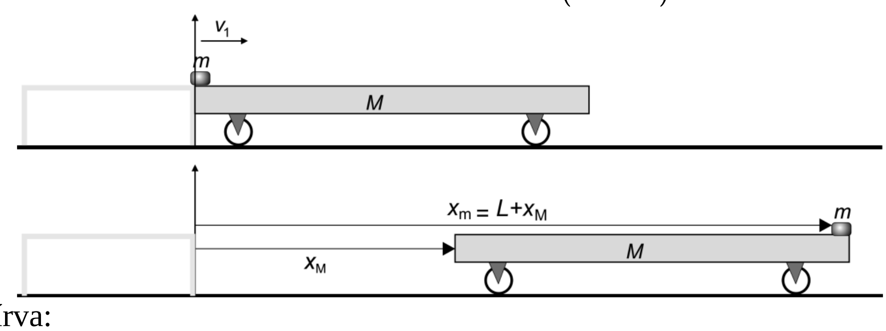
Megoldás.

Felírjuk a rendszerre a munkatételt a kezdő- és végállapot közötti szakaszra, valamint az impulzus megmaradását, mivel külső erők eredője nulla.

A munkatétel:
$$\mu mgx_{\mathrm{M}} - \mu mg\left(L - x_{\mathrm{M}}\right) = \frac{1}{2}\left(m+M\right)v_{\mathrm{k}}^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \tag{1}$$

ahol v_{k} a kis test kocsihoz viszonyított megállásakor felvett, a kocsival közös sebessége.

Az impulzus (lendület) megmaradása:
$$mv_1 = \left(m+M\right)v_{\mathrm{k}} \qquad \rightarrow \qquad v_{\mathrm{k}} = \frac{mv_1}{\left(m+M\right)}. \tag{2}$$



(2)-t (1)-be írva:
$$\mu mgx_{\mathrm{M}} - \mu mg\left(L + x_{\mathrm{M}}\right) = \frac{1}{2}\left(m+M\right)\frac{m^2v_1^2}{\left(m+M\right)^2} - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Rendezve:
$$L = \frac{v_1^2}{2\mu g}\cdot\frac{M}{\left(m+M\right)}.$$

Adatainkkal:
$$L = \frac{6^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot 0,7\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\cdot\frac{50\ \mathrm{kg}}{\left(10\ \mathrm{kg}+50\ \mathrm{kg}\right)} = \mathbf{2{,}14\ m}.$$

33. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS KÖZÉPISKOLAI TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY
HARMADIK FORDULÓ
9-ik osztály Gyöngyös, 2014. május 4-6.

Szakközépiskola

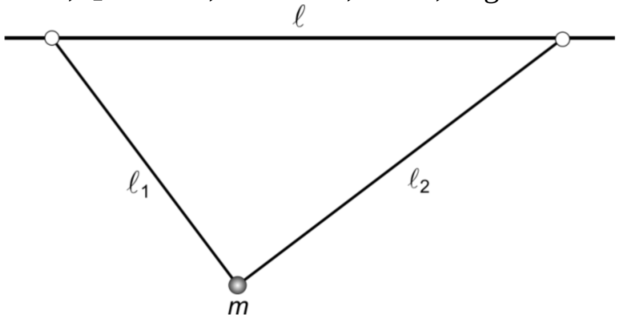
1. Egy 30 cm, és egy 40 cm hosszú fonal egy-egy végét a mennyezeten rögzítjük, egymástól 50 cm távolságban. Mindkét fonál másik végét egy pici, 10 dkg tömegű testhez erősítjük.

a) Mekkora erők ébrednek a fonalakban?

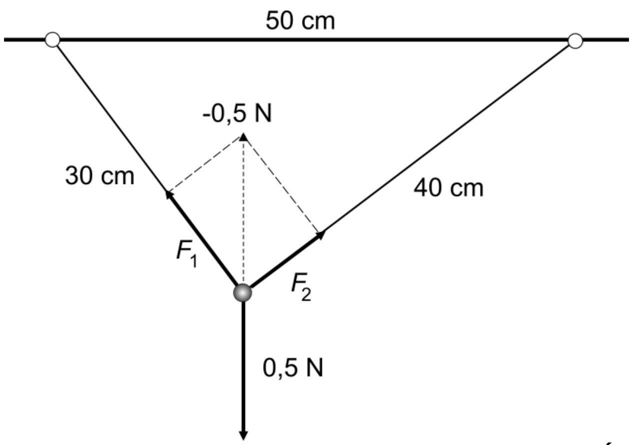
b) A hosszabb fonalat elégetjük. Mekkora erő ébred a másik fonálban abban a pillanatban, amikor az éppen függőleges.

(Simon Péter)

Megoldás: Adatok: l_1 = 30 cm, l_2 =40 cm, l = 50 cm, m = 0,1 kg.



a) A fonalak egy derékszögű háromszöget határoznak meg, mivel a hosszak (30, 40, 50) pitagorászi számhármast alkotnak. A nyugalomban lévő testre ható erők eredője nulla, tehát az erők (F_1, F_2, mg) is egy derékszögű háromszöget határoznak meg.



A két háromszög hasonló, ezért a megfelelő oldalaik aránya egyenlő. Így

$$F_2 : 1\text{ N} = 40 : 50 \quad \rightarrow \quad F_2 = \frac{40}{50} \cdot 1\text{ N} = \mathbf{0,8\ N,}$$

és

$$F_1 : 1\text{ N} = 30 : 50 \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{30}{50} \cdot 1\text{ N} = \mathbf{0,6\ N.}$$

b) Amikor az l_2 hosszú fonalat égetjük el, a test h = 24 cm-rel van a plafon alatt.
(A derékszögű háromszög területét kétféleképen is felírhatjuk:

$$\frac{l \cdot h}{2} = \frac{l_1 \cdot l_2}{2} \Rightarrow h = \frac{l_1 \cdot l_2}{l} = 24\text{ cm .)}$$

Az energiamérleg segítségével ki tudjuk fejezni a test sebességének négyzetét, amikor a fonál éppen függőleges:

$$mg \cdot (l_1 - h) = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = 2g \cdot (l_1 - h)$$

A testre írjuk fel a dinamika alapegyenletét, amikor a fonál függőleges:

$$\sum F = ma_{cp}$$

$$K - mg = m\frac{v^2}{l_1}$$

$$K = m \cdot \left(g + \frac{2g \cdot (l_1 - h)}{l_1} \right) = mg \cdot \left[3 - \frac{2h}{l_1} \right]$$

K = **14 N.**

2. Egy kilövő szerkezetből függőlegesen felfelé v_0 = 60 m/s sebességgel kilőtt 18 kg tömegű robbanó lövedék pályájának felszálló ága félmagasságában két darabra robbant szét. Ennek következtében az M = 12 kg-os darab a pálya egyenesére merőleges, I = 120 Ns nagyságú impulzust (lendületet) kapott. Milyen távol lesznek egymástól a darabok, amikor mindkét rész a talajba csapódik?
(A légellenállástól tekintsünk el.) *(Holics László)*

Megoldás. A jelenség akkor írható le a legkönnyebben, ha beülünk a lövedék tömegközéppontjával együtt mozgó koordinátarendszerbe. Ekkor szétrobbanás után is változatlanul függőleges hajításnak megfelelő mozgást végez rendszerünk, mert vízszintes erő hiányában a rendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha nem robbant volna szét a lövedék. Mivel a robbanáskor vízszintes lendületet kapott az M tömegű rész a másik, m tömegű résztől (és ugyanekkora, ellentétes irányút az m tömegű M tömegűtől), mindkét repesz és a tömegközéppont is egyaránt azonos g gyorsulással emelkedik, majd esik (szabad mozgást végeznek a gravitációs mezőben), ezért *egymáshoz képest* nem gyorsulnak, azaz *ebben a koordinátarendszerben egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.*

A talajról nézve a függőleges hajítás csak annyiban érdekes, hogy a pálya magasságát és az időadatokat meg tudjuk határozni belőle.
A lendület megmaradása a (pillanatszerű) robbanás után:

$$m v_x = M V_x = I_x,$$

innen egyrészt a nagyobbik darab sebessége:

$$M V_x = I_x \quad \rightarrow \quad V_x = \frac{I_x}{M} = \frac{120 \text{ Ns}}{12 \text{ kg}} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

másrészt a kisebbik repesz sebessége:

$$v_x = \frac{M}{m} V_x = \frac{12 \text{ kg}}{18 \text{ kg} - 12 \text{ kg}} 10\frac{\text{m}}{\text{s}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Együttmozgó koordinátarendszerünkben tehát egyenes vonalú egyenletes mozgással távolodnak egymástól a darabok, és Δt idő múlva

$$d = (v_x + V_x)\Delta t$$

messzire kerülnek. Meghatározandó tehát a t idő. Itt már *a talajhoz rögzített rendszerből* kaphatjuk meg a szükséges adatokat. A tömegközéppont és a szilánkok hajítási ideje megegyezik. (Ez utóbbiak „ferde hajítást” végeznek, ez azonban nem érint minket.) A *függőleges hajítás* teljes ideje:

$$T_{\text{haj}} = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 60\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 12 \text{ s}.$$

A szétrobbanásig (a pálya félmagasságáig) eltelt időt megadó egyenlet:

$$\frac{h_{\max}}{2} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

ahol az emelkedés magassága: $h_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2g}.$

Ezzel egyenletünk az időre: $\dfrac{v_0^2}{4g} = v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2.$

Rendezve: $\dfrac{1}{2} g t^2 - v_0 t + \dfrac{v_0^2}{4g} = 0 \quad \rightarrow \quad g t^2 - 2 v_0 t + \dfrac{v_0^2}{2g} = 0.$

Numerikusan: $10 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2 - 2 \cdot 60 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} t + \dfrac{3600 \dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 10 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0,$

dimenziók nélkül: $10 t^2 - 120 \cdot t + 180 = 0.$

Ennek megoldása:

$$t = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 10 \cdot 180}}{20} = \begin{matrix} 10{,}24 \text{ s} \\ 1{,}757 \text{ s} \end{matrix}.$$

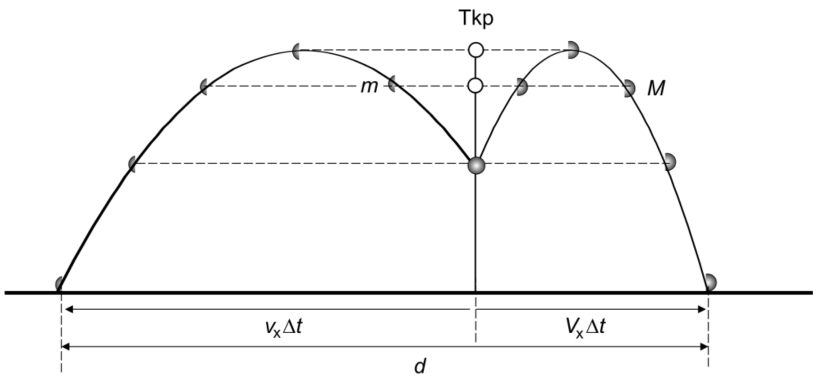
A nagyobbik adat a *leszálló ág* félmagasságáig eltelt időt, a kisebbik a *felszálló ágét* jelenti.
A *robbanástól a talajra érkezésig* eltelt idő tehát:

$$\Delta t = T_{\text{haj}} - t = 12 \text{ s} - 1{,}747 \text{ s} = 10{,}24 \text{ s}.$$

A robbanástól számítva ennyi idő alatt érnek (egyszerre) a részek a talajra, ennyi idő alatt egymástól

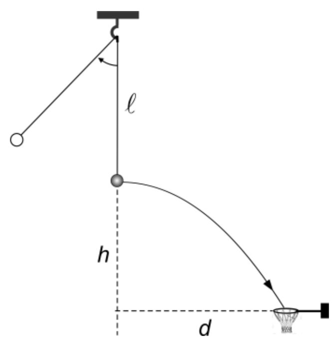
$$d = (v_x + V_x)\Delta t = \left(10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \cdot 10{,}24 \text{ s} = \mathbf{307{,}2\,m}$$

távolságra kerültek.



A tényleges mozgás a talajról nézve

3. Az ábra szerint egy fél-kampón, ℓ = 1,6 m hosszú, igen vékony fonálon függő vasgolyót kitérítünk, majd kezdősebesség nélkül elengedünk. Amikor a fonál függőlegessé válik, elhagyja a kampót. A vasgolyó ettől a helyzettől h = 1,25 m mélyen levő szinten, vízszintes irányban d = 2 m távolságban elhelyezett kosárlabda-hálóba esik. Mekkora szöggel térítettük ki a fonalat?



(Holics László)

Megoldás. Meg kell határozni a vízszintes hajítás kezdősebességét. Ez a mozgás vízszintes vetületének vizsgálatával kezdődik: mekkora állandó sebessége legyen a golyónak, hogy adott idő alatt eljusson a *d* távolságra levő kosárig. Ennek nagysága:

$$v_x = \frac{d}{t},$$

ahol *t* az az idő, amely alatt a függőleges mozgásvetületben a golyó (függőleges kezdősebesség nélkül) *h* mélységre süllyed:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad \left(= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25\ \mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0,5\ \mathrm{s} \right)$$

Ezzel a vízszintes hajítási kezdősebesség:

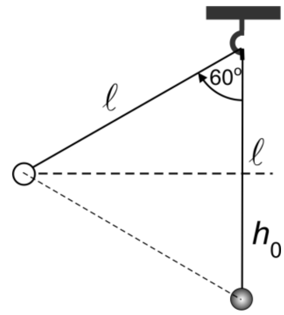
$$v_x = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = d\sqrt{\frac{g}{2h}}. \qquad \left(= 2\ \mathrm{m}\sqrt{\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 1,25\ \mathrm{m}}} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right)$$

Ekkora sebességre kell szert tennie a vasgolyónak, amit a kitérítés után kapott helyzeti energia növekedéséből szerez. Kitérítés utáni helyzeti energianövekedés:

$$\Delta E_h = mgh_0 = \frac{1}{2} m v_x^2.$$

Innen a kitérítés során létrejövő emelkedés magassága:

$$h_0 = \frac{v_x^2}{2g} = \frac{d^2}{2g}\frac{g}{2h} = \frac{d^2}{4h} = \frac{4\ \mathrm{m}^2}{4 \cdot 1,25\ \mathrm{m}} = 0,8\ \mathrm{m}.$$



Mivel a fonál hossza 1,6 m volt (kétszerese a kapott emelkedés-magasságnak), az ábra szerint is látható, hogy egyszabályos háromszög α **= 60°**-os szögének megfelelő kitérítés a megfelelő, amellyel a vasgolyó a kosárba jut.

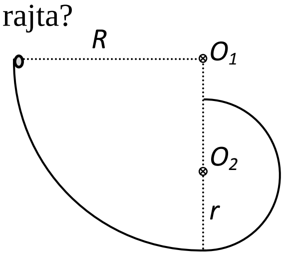
(Paraméteresen: $\cos\alpha = \frac{\ell - h_0}{\ell} = 1 - \frac{h_0}{\ell} = 1 - \frac{0,8}{1,6} = 1 - 0,5 = 0,5, \quad \rightarrow \quad \alpha = \arccos 0,5 = 60°.$)

4. Vékony lemezből az ábrán láthatóhoz hasonló, negyed- és félkörívből összeillesztett pályát készítünk, majd függőleges síkban rögzítjük. Az *R* sugarú ív felső végénél egy a felülethez illesztett apró testet kezdősebesség nélkül magára hagyunk, amely gyakorlatilag súrlódásmentesen csúszhat a kényszerpályán.

a) Mekkora legyen a *R/r* arány, hogy a test végighaladjon a kényszerpályán?

b) A pálya aljától mérve a kezdeti magasság hányad részéig jut a test, ha *R/r* = 2?

c) Milyen *R/r* arány esetén esik vissza a test a kényszerpályára az O_2 ponttal egy magasságban, miután végighaladt rajta?



(Szkladányi András)

Megoldás: *a)* A test akkor halad végig a pályán, ha mindvégig hat rá kényszererő, illetve az legfeljebb a pálya végénél csökken nullára. Ekkor a nehézségi erő éppen elegendő a test körpályán tartásához:

$$mg = m\frac{v_1^2}{r}$$

A mechanikai energia megmaradása miatt:

$$mg(R-2r)=\frac{1}{2}mv_1^2$$

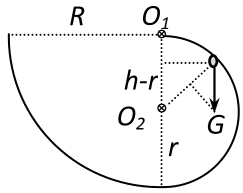
A két egyenletből:

$$mg(R-2r)=\frac{1}{2}mgr$$

A keresett arány:

$$\underline{\frac{R}{r}=\frac{5}{2}}$$

b) *R/r* = 2 esetén is vizsgáljuk azt a pillanatot, amikor a kényszererő megszűnik. Jelölje a test magasságát a pálya aljától *h*, sebességét v_2. A mechanikai energia megmaradása miatt:



$$mg(R-h)=\frac{1}{2}mv_2^2$$

A körmozgás dinamikai feltétele (és hasonló háromszögek) alapján:

$$m\frac{v_2^2}{r}=mg\frac{h-r}{r}$$

Behelyettesítés után:

$$mg(R-h)=\frac{1}{2}mg(h-r)$$

Egyszerűsítve és felhasználva a sugarak arányát:

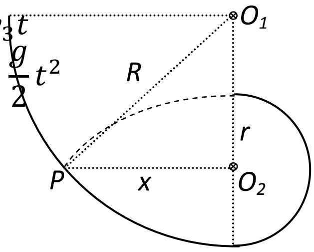
A keresett arány:

$$\underline{\frac{h}{R}=\frac{5}{6}}$$

c) A pályától való elválás után a test vízszintes hajítással mozog. Jelölje ennek kezdősebességét v_3, a becsapódás helyét *P*.

$$x=v_3t$$

$$y=r=\frac{g}{2}t^2$$



Az időt kiküszöbölve:

$$x^2=\frac{2rv_3^2}{g}.$$

Az $O_1\,O_2P$ háromszög derékszögű, ezért:

$$x^2+(R-r)^2=R^2$$

A két egyenletből:

A mechanikai energia megmaradása miatt:

$$mg(R-2r)=\frac{1}{2}mv_3^2$$

$$v_3^2=2g(R-2r)$$

Behelyettesítés után:

Átalakítások után a keresett arány:

$$\underline{\frac{R}{r}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}.}$$

Ez az eredmény teljesíti az *a)* pontban kapott *R/r* > 2,5 feltételt.