A 33. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Gimnázium 10. osztály
Pécs 2014

1. feladat:

a) A testek sebessége akkor lesz a legnagyobb, amikor a rugó összenyomódása megszűnik. Legyen a kisméretű test sebessége ekkor υ_1, a kocsié pedig υ_2! A lendület-és energia-megmaradásból:

$$m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = 0,$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_0. \qquad \textbf{2 pont}$$

$$\frac{1}{2}D(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2, \qquad \textbf{2 pont}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{16mg}{R}\cdot\frac{R}{4}^2 = m\upsilon_0^2,$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{2gR} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\boxed{\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_0 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.} \qquad \textbf{2 pont}$$

b) Abban a pillanatban, amikor a test lerepül a negyedkör alakú lejtőről, a vízszintes irányú sebessége megegyezik a kocsi υ_{1x} vízszintes irányú sebességével. A vízszintes irányú lendület-megmaradásból:

$$0 = 2m\upsilon_{1x},$$

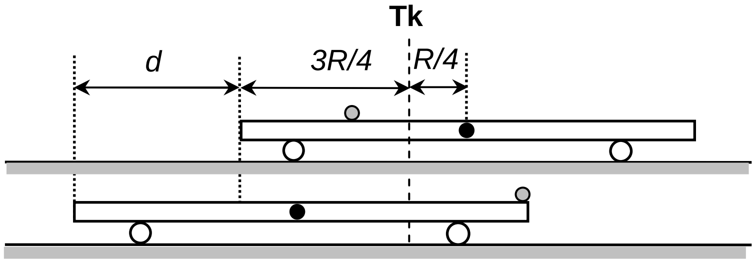
$$\upsilon_{1x} = 0. \qquad \textbf{2 pont}$$

Ebben a pillanatban a kocsi megáll. Legyen a keresett emelkedési magasság *h*! A mechanikai energia megmaradásából:

$$2\cdot\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = mgh,$$

$$\boxed{h = \frac{\upsilon_0^2}{g} = 2R = 0{,}4\ \text{m}.} \qquad \textbf{2 pont}$$

Vízszintes irányban nem hatnak külső erők, ezért a tömegközéppont helyben marad. A tömegek egyenlőségéből adódik, hogy a talajhoz viszonyított elmozdulásuk megegyezik. Legyen a kocsi keresett elmozdulása *d*! Az elmozdulások egyenlőségéből:



2 pont

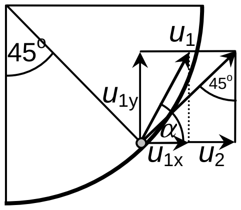
$$\frac{3}{2}R - d = d,$$

$$\boxed{d = \frac{3}{4}R = 0{,}15\ \text{m.}}$$ **2 pont**

c) Legyen ebben a pillanatban a kocsi sebessége u_2, a kis test sebességének komponensei u_{1x} és u_{1y}! A vízszintes irányban a lendület végig megmarad, így:

$$u_2 = u_{1x}.$$ **2 pont**

Használjuk fel, hogy a kocsihoz rögzített rendszerben a kis test körpályán mozog, tehát ebben a rendszerben a sebessége érintő irányú. Az ábra alapján:



$$u_{1y} = 2u_2.$$

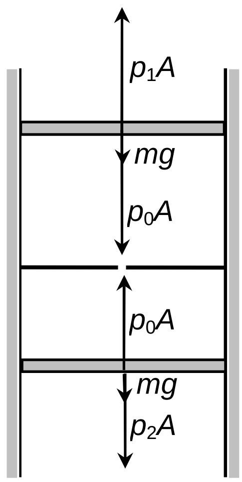
A keresett szög:

$$tg\alpha = \frac{2u_2}{u_2} = 2,$$

$$\boxed{\alpha = 63{,}43^\circ.}$$ **4 pont**

Összesen: 20 pont

2. feladat:



Vizsgáljuk először az *a*) esetet, amikor rendszer hőszigetelt, tehát nincs termikus kölcsönhatás! Legyen a külső nyomás p_0, a dugattyú tömege m, keresztmetszete A, gáz kezdeti térfogata V_1, az átszivárgás utáni térfogata V_2! Egy közbenső helyzetben legyen a gáz nyomása a felső térrészben p_1, az alsóban p_2! A felső és alsó dugattyú lassan, állandó sebességgel halad, így a ráható erők eredője zérus.

$$p_0A + mg - p_1A = 0,$$ **1 pont**

$$p_2A + mg - p_0A = 0.$$ **1 pont**

Ezekből látható, hogy a dugattyúk mozgása során az egyes térrészekben a nyomások állandók.

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A},$$ **1 pont**

$$p_2 = p_0 - \frac{mg}{A}.$$ **1 pont**

A rendszeren végzett munka:

$$W = (p_0A + mg)\frac{V_1}{A} - p_0A\cdot\frac{V_2}{A} + mg\cdot\frac{V_2}{A},$$ **3 pont**

$$W = p_1V_1 - p_2V_2.$$ **2 pont**

A termodinamika első főtételéből:

$$E_{b2} - E_{b1} = W,$$ **1 pont**

$$\frac{f}{2} p_2V_2 - \frac{f}{2} p_1V_1 = p_1V_1 - p_2V_2,$$ **2 pont**

$$\left(\frac{f}{2}+1\right)p_1V_1 = \left(\frac{f}{2}+1\right)p_2V_2,$$

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$ **2 pont**

A gáz belső energiája tehát a végállapotban megegyezik a kezdeti belső energiával. Ez azt is jelenti, hogy a gáz hőmérséklete megegyezik a végállapotban a környezet hőmérsékletével. **1 pont**

A *b*) eset vizsgálva könnyen láthatjuk, hogy ebben az esetben is egyenlő a gáz végállapotbeli hőmérséklete a környezet hőmérsékletével, hiszen ekkor a feltételek miatt végig termikus egyensúlyban van a környezetével. Ezt azt jelenti, hogy a vizsgált két esetben a gáz végállapotbeli hőmérséklete és nyomása is egyenlő. Ebből az következik, hogy a térfogatuk is egyenlő. *A dugattyúk azonos mélységig süllyednek le.*
5 pont

Összesen: 20 pont

3. feladat:

A lövedék tömegközéppontja szétrobbanás után változatlanul azon a hajítási parabola-pályán mozog, amelyen mozgott volna, ha nem robban fel. Mivel a nagyobb tömegű darab a robbanás során a pályasíkra merőleges (vízszintes) lendületet kapott a kisebbik darabtól, (és ugyanekkora, ellentétes irányút kapott a kisebbik tömegű,) ez egyik darabnak sem befolyásolta a függőleges sebességkomponensét, vagyis minden pillanatban abban a magasságban voltak, amelyikben a tömegközéppont. Ha beülünk a tömegközépponti rendszerbe, két, egy egyenesbe eső, egyenes vonalú egyenletes mozgást végző repeszt látunk, amelynek egymástól való távolsága a sebességek és mozgásidők szorzatával számítható. **4 pont**

Meg kell tehát határozni a részek sebességeit, és a robbanástól a talajtérésig eltelt időt.
A lendület vízszintes vetületének megmaradása alapján írható:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = 0,$$ **1 pont**

amiből a kisebb test sebességének a tömegközéppont pályasíkjára merőleges komponense

$$\upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 = 2\upsilon_1.$$ **1 pont**

Az m_1 tömegű darab sebessége pedig

$$\upsilon_1 = \frac{I_1}{m_1} = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$ **1 pont**

Tehát a kisebb darab sebességének a tömegközéppont pályasíkjára merőleges komponense:

$$\upsilon_2 = 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$ **1 pont**

A tömegközéppont és a szilánkok hajítási ideje megegyezik, ami a fel nem robbant lövedék hajítási idejével azonos:

$$T_{\text{haj}} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = 25{,}98 \text{ s.}$$ **2 pont**

A pálya félmagasságáig eltelt idő a függőleges hajítás összefüggései alapján határozható meg:

$$\frac{h_{\max}}{2} = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2,$$ **2 pont**

ahol $$h_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 843{,}75 \text{ m.}$$ **1 pont**

Ezzel a félmagasság eléréséig eltelt időre kapott másodfokú egyenlet:

$$\frac{1}{2}gt^2 - \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{4g} = 0,$$

$$gt^2 - 2\upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 0.$$ **1 pont**

Ennek megoldása:

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha \pm \sqrt{4\upsilon_0^2 \sin^2\alpha - 2\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}}{2g},$$

$$t = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = 3{,}80 \text{ s.}$$ **2 pont**

A felszálló ágra a negatív műveleti jel vonatkozik.
A robbanástól a leesésig eltelt idő tehát:

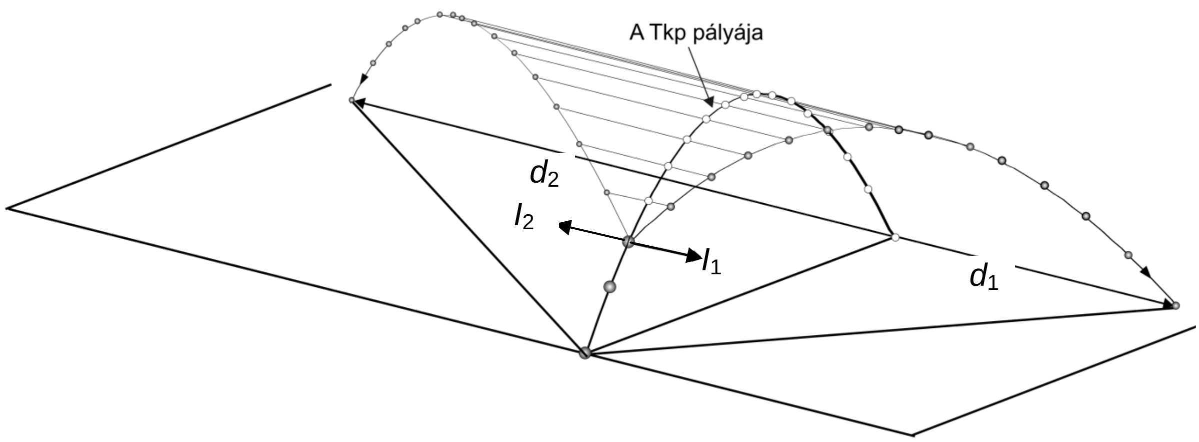
$$t^* = T_{\text{haj}} - t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g},$$ **1 pont**

$$t^* = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = 22{,}18 \text{ s.}$$ **1 pont**

Az egyszerre leérkező repeszdarabok egymástól mért távolsága:

$$\boxed{d = (\upsilon_1 + \upsilon_2) \cdot t^* = 6\,652{,}8 \text{ m.}}$$ **2 pont**

Összesen: 20 pont



4. feladat:

a) A $2Q$ töltésű golyó sebessége akkor lesz a legnagyobb, amikor a golyók egy egyenesbe kerülnek. Legyen ekkor a Q töltésű golyók sebessége υ_1, a $2Q$ töltésűé pedig υ_2! A lendület- és energia-megmaradásból:

$$2m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = 0,$$ **1 pont**

$$2 \cdot k\frac{2Q^2}{L} + k\frac{Q^2}{L} = 2 \cdot k\frac{2Q^2}{L} + k\frac{Q^2}{2L} + 2 \cdot \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2.$$ **2 pont**

Ezekből:

$$\upsilon_2 = 2\upsilon_1,$$

$$k\frac{Q^2}{L} = 2m\upsilon_1^2 + m\upsilon_2^2.$$

A keresett legnagyobb sebességek:

$$\boxed{\upsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot k\frac{Q^2}{mL}},}$$ **1 pont**

$$\boxed{\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot k\frac{Q^2}{mL}}.}$$ **1 pont**

b) Ebben a pillanatban a $2Q$ töltésű golyó nem gyorsul, és hozzá viszonyítva a másik két golyó L sugarú körpályán mozog $\upsilon_r = \upsilon_1 + \upsilon_2$ sebességgel. A dinamika alapegyenletét felírva számolhatjuk a kérdéses K fonálerőt. **2 pont**

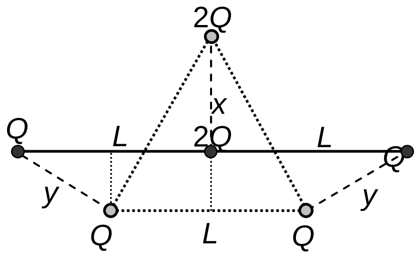
$$m\frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{L} = K - k\frac{2Q^2}{L^2} - k\frac{Q^2}{4L^2},$$ **2 pont**

$$m\frac{(3\upsilon_1)^2}{L} = K - k\frac{9Q^2}{4L^2}.$$

υ_1 értékét beírva és alakítva:

$$\boxed{K = \frac{15}{4} \cdot k\frac{Q^2}{L^2}.}$$ **1 pont**

c) Legyen a Q töltésű golyók elmozdulása a kérdéses helyzet eléréséig y, a $2Q$ töltésű golyóé pedig x! A rendszerre ható külső erők eredője zérus, a rendszer zárt, így a tömegközéppontja helyben marad. A $2Q$ töltésű golyó tehát éppen a tömegközéppontba kerül.



Elmozdulása:

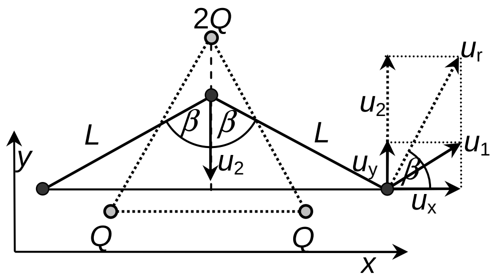
$$\boxed{x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L = \frac{\sqrt{3}}{3} L.}$$ **2 pont**

Az y elmozdulásra a geometriából következően igaz, hogy:

$$y^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L\right)^2,$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3} L.}$$ **2 pont**

d) Legyen ebben a pillanatban a Q töltésű golyók sebessége u_1, ennek komponensei u_x és u_y, a $2Q$ töltésű golyó sebessége pedig u_2! A lendület-megmaradásból:



$$2mu_{\mathrm{y}} - mu_2 = 0,$$

$$u_{\mathrm{y}} = \frac{u_2}{2}.$$ **1 pont**

Mindkét Q töltésű golyó a $2Q$ töltésű golyóhoz rögzített koordináta-rendszerben körpályán mozog. Tehát a relatív sebességük merőleges a fonálra. Ebből a feltételből:

$$tg\beta = \frac{u_{\mathrm{y}} + u_2}{u_{\mathrm{x}}},$$ **1 pont**

$$u_{\mathrm{x}} = \frac{u_{\mathrm{y}} + u_2}{tg\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2} u_2.$$ **1 pont**

A két sebesség kapcsolata:

$$u_1 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{\frac{u_2^2}{4} + \frac{3u_2^2}{4}},$$

$$u_1 = u_2.$$ **1 pont**

Az energia-megmaradásból:

$$2 \cdot k \frac{2Q^2}{L} + k \frac{Q^2}{L} = 2 \cdot k \frac{2Q^2}{L} + k \frac{Q^2}{2L \sin \beta} + 2 \cdot \frac{1}{2} mu_1^2 + \frac{1}{2} mu_2^2,$$ **1 pont**

$$k \frac{Q^2}{L} \left(1 - \frac{1}{2 \sin \beta}\right) = \frac{3}{2} mu_2^2.$$

A keresett sebességek:

$$\boxed{u_1 = u_2 = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) k \frac{Q^2}{mL}}.}$$ **1 pont**

Összesen: 20 pont

A 33. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Szakközépiskola 10. osztály
Pécs 2014

1. feladat:

a) A kiskocsi addig nyugalomban marad, amíg a hasáb az oldalfalának neki nem ütközik. Legyen a hasáb sebessége az első rugalmas ütközés után u_1, a kiskocsié pedig u_2! A lendület- és energia-megmaradásból:

$$m\upsilon_0 = mu_1 + 3mu_2, \quad \textbf{2 pont}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}3mu_2^2. \quad \textbf{2 pont}$$

Az u_1 sebességet az első egyenletből kifejezve és másodikba beírva:

$$\upsilon_0^2 = (\upsilon_0 - 3u_2)^2 + 3u_2^2,$$

$$\upsilon_0^2 = \upsilon_0^2 - 6\upsilon_0 u_2 + 9u_2^2 + 3u_2^2,$$

$$u_2(12u_2 - 6\upsilon_0) = 0. \quad \textbf{3 pont}$$

A kiskocsi u_2 sebessége nem lehet nulla, ezért $12u_2 - 6\upsilon_0 = 0,$ azaz

$$u_2 = \frac{1}{2}\upsilon_0. \quad \textbf{1 pont}$$

A hasáb keresett sebessége:

$$\boxed{u_1 = \upsilon_0 - 3u_2 = -\frac{1}{2}\upsilon_0 = -1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.} \quad \textbf{2 pont}$$

A hasáb az ütközés után jobbra mozog.

b) Viszonyítsuk a hasáb sebességét a kocsihoz! A hasáb a kocsihoz képest az ütközés után υ_0 sebességgel mozog, és jobb oldali fal eléréséig $L – d$ utat tesz meg. A két ütközés között eltelt idő:

$$\boxed{t_1 = \frac{L-d}{\upsilon_0} = 0{,}9\ \mathrm{s}.} \quad \textbf{4 pont}$$

c) A második ütközés során is megmarad a lendület és a mozgási energia. Ugyanazokat az egyenleteket írhatjuk fel, mint az első esetben, és formailag ugyanazt az eredményt kapjuk:

$$u_2^*(12u_2^* - 6\upsilon_0) = 0. \quad \textbf{2 pont}$$

Az ütközés miatt u_2^* nem maradhat változatlan, ezért

$$u_2^* = 0,$$ **1 pont**

$$u_1^* = \upsilon_0 - 3u_2 = \upsilon_0.$$ **1 pont**

A kiskocsi tehát megáll, így a második és harmadik ütközés között eltelt idő:

$$\boxed{t_2 = \frac{L-d}{\upsilon_0} = 0{,}9\ \text{s.}}$$ **2 pont**

Összesen: 20 pont

2. feladat:

a) Legyen a henger megmozdulásának pillanatában a bezárt levegő nyomása p_1, térfogata V_1, hőmérséklete T_1! Ebben a pillanatban a hengerre ható erők eredője zérus:

$$p_1 A - p_0 A - \mu mg = 0,$$ **2 pont**

$$p_1 = p_0 + \frac{\mu mg}{A} = 1{,}1 \cdot 10^5\ \text{Pa.}$$ **2 pont**

Gay-Lussac II. törvényéből:

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1},$$ **1 pont**

$$\boxed{T_1 = \frac{p_1}{p_0} \cdot T_0 = 330\ \text{K.}}$$ **1 pont**

b) A levegővel közölt hő ebben a folyamatban a levegő belső energiáját növeli:

$$Q_1 = E_1 - E_0,$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{5}{2}(p_1 - p_0)V_0 = 25\ \text{J.}}$$ **4 pont**

c) Gay-Lussac I. törvényéből:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{1{,}1 \cdot V_0}{T_2},$$ **2 pont**

$$\boxed{T_2 = 1{,}1 \cdot T_0 = 363\ \text{K.}}$$ **1 pont**

d) A henger lassú mozgása során a levegő izobár tágulást végez. A levegő melegítéséhez szükséges hő ebben a folyamatban:

$$Q_2 = c_p m_l (T_2 - T_1) = \frac{7}{2}\frac{R}{M} m_l \cdot (T_2 - T_1),$$ **2 pont**

$$Q_2 = \frac{7}{2} p_1 (1{,}1 \cdot V_0 - V_0),$$ **2 pont**

$$Q_2 = \frac{7}{20} p_1 V_0 = 38{,}5 \text{ J}.$$ **1 pont**

A fűtőberendezés által a levegővel közölt hő, ami csak a levegő melegítésére fordítódott:

$$\boxed{Q_ö = Q_1 + Q_2 = 63{,}5 \text{ J}.}$$ **2 pont**

Összesen: 20 pont

3. feladat:

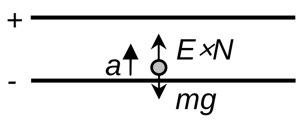
a) Az állandó υ_1 sebességgel süllyedő olajcseppre ható erők eredője zérus:

$$C\upsilon_1 - mg = 0.$$ **2 pont**

Ebből a közegellenállási erő kifejezésében szereplő állandó értéke:

$$C = \frac{mg}{\upsilon_1} = 1{,}96 \cdot 10^{-5} \ \frac{\text{Ns}}{\text{m}}.$$ **1 pont**

Legyen *N*, a másik olajcseppre kerül elektronok száma! Írjuk fel a felfelé *a* gyorsulással induló olajcsepp mozgására a dinamika alapegyenletét!

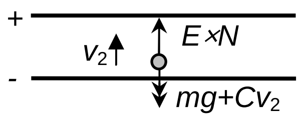


$$ma = E \cdot Ne - mg,$$ **2 pont**

ahol: $$E = \frac{U}{d}.$$ **2 pont**

Ezekből: $$\boxed{N = \frac{m(a+g) \cdot d}{U \cdot e} = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ db.}}$$ **3 pont**

b) A felfelé mozgó olajcseppre ható közegellenállási erő növekszik, és egy bizonyos υ_2 sebesség elérésekor az erők eredője zérussá válik.



$$E \cdot Ne - mg - C\upsilon_2 = 0,$$ **4 pont**

$$ma - C\upsilon_2 = 0,$$ **2 pont**

$$\upsilon_2 = \frac{ma}{C},$$ **1 pont**

$$\boxed{\upsilon_2 = \frac{a}{g}\upsilon_1 \approx 0{,}02 \ \frac{\text{mm}}{\text{s}}.}$$ **3 pont**

Összesen: 20 pont

4. feladat:

a) A test akkor halad végig a pályán, ha mindvégig hat rá kényszererő, illetve az legfeljebb a pálya végénél csökken nullára. Ekkor a nehézségi erő éppen elegendő a test körpályán tartásához. Legyen ebben a pontban a test sebessége υ_1! A dinamika alapegyenletéből és mechanikai energia megmaradásából:

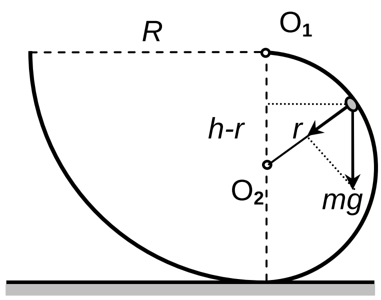
$$m\frac{\upsilon_1^2}{r} = mg,$$ **2 pont**

$$mgR = 2mgr + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2.$$ **2 pont**

Ezekből: $$mgR = 2mgr + \frac{1}{2}mgr,$$

$$\boxed{\frac{R}{r} = \frac{5}{2}.}$$ **2 pont**

b) $\frac{R}{r} = 2$ esetén is vizsgáljuk azt a pillanatot, amikor a kényszererő megszűnik. Jelölje a test magasságát a pálya aljától h, sebességét υ_2! A mechanikai energia megmaradása miatt:



$$mgR = mgh + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2.$$ **2 pont**

A körmozgás dinamikai feltétele (és hasonló háromszögek) alapján:

$$m\frac{\upsilon_2^2}{r} = mg\frac{h-r}{r}.$$ **2 pont**

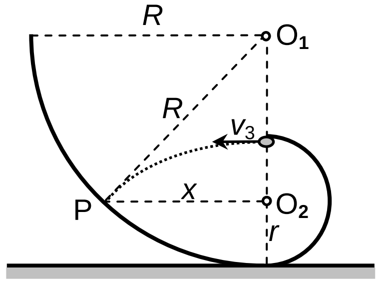
υ_2^2 értékét kiküszöbölve:

$$mgR = mgh + \frac{1}{2}mg\left(h - \frac{R}{2}\right).$$

A keresett arány:

$$\boxed{\frac{h}{R} = \frac{5}{6}.}$$ **2 pont**

c) A pályától való elválás után a test vízszintes hajítással mozog. Jelölje ennek kezdősebességét υ_3, a becsapódás helyét P!



$$x = \upsilon_3 t,$$ **1 pont**

$$r = \frac{g}{2}t^2.$$ **1 pont**

Ezekből: $x^2 = \frac{2r\upsilon_3^2}{g}$. **1 pont**

A mechanikai energia megmaradása miatt:

$$mgR = 2mgr + \frac{1}{2}m\upsilon_3^2,$$ **1 pont**

$$\upsilon_3^2 = 2g(R - 2r).$$

υ_3^2 értékét az x^2 kifejezésébe beírva:

$$x^2 = 4r(R - 2r).$$ **1 pont**

Az O_1PO_2 háromszög derékszögű, ezért:

$$x^2 + (R - r)^2 = R^2.$$ **1 pont**

x^2 értékét ebbe beírva:

$$4r(R - 2r) + (R - r)^2 = R^2.$$

Ezt alakítva: $2R = 7r$,

$$\boxed{\frac{R}{r} = \frac{7}{2}.}$$ **2 pont**

Ez az eredmény teljesíti az *a*) pontban kapott $R/r > 2{,}5$ feltételt.

Összesen: 20 pont