Gimnázium 9. évfolyam

1. Egy elég magas toronyból szabadon eső test útjának utolsó 2 másodpercében másfélszer annyi utat tesz meg, mint az azt megelőző 2 másodpercben. Milyen magasról esett a test? (A közegellenállástól tekintsünk el!)

(*Dudics Pál, Debrecen*)

Megoldás:

$$\frac{g}{2}\cdot t^2-\left(\frac{g}{2}(t-2\,\mathrm{s})^2\right)=1{,}5\cdot\left[\frac{g}{2}(t-2\,\mathrm{s})^2-\frac{g}{2}(t-4\,\mathrm{s})^2\right]$$

Ezt egyszerűsítve, és rendezve:

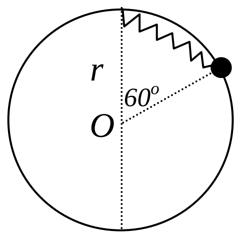
$$t=7\ \mathrm{s}\,.$$

Az ejtés magassága: $h=\frac{g}{2}\cdot t^2=245\ \mathrm{m}$.

2. Kör alakú, függőleges síkú, drótból készült karikán 0,5 kg tömegű, elhanyagolható méretű test mozoghat súrlódásmentesen. A testet 20 N/m rugóállandójú rugóhoz erősítettük, amelynek másik végét a 20 cm sugarú körpálya legfelső pontjában rögzítettük az ábra szerint. Kezdetben a rugó nyújtatlan, és a testhez húzott sugár 60^o-os szöget zár be a függőlegessel.

a) Mekkora a test gyorsulása, amikor a testhez húzott sugár vízszintes helyzetű?

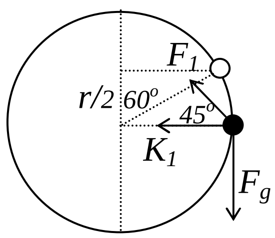
b) Mekkora és milyen irányú erőt fejt ki a test a kényszerpályára a legalsó pontban?



(*Szkladányi András, Baja*)

Megoldás:

a)



A rugó nyugalmi hossza egyenlő a körpálya sugarával. Amikor a testhez húzott sugár vízszintes helyzetű, a rugó megnyúlása:

$$\Delta l_1=r\cdot\left(\sqrt{2}-1\right).$$

A rugó által kifejtett erő: $F_1=D\cdot\Delta l_1=D\cdot r\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Ez az erő (és így függőleges komponense is) kisebb a nehézségi erőnél, ezért a test érintő irányú gyorsulása lefelé mutat, és nagysága:

$$a_{é,1}=\frac{F_g-F_{1y}}{m}=g-\frac{F_1}{\sqrt{2}\cdot m}=g-\frac{D\cdot r\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}\cdot m}=7{,}66\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

A test centripetális gyorsulásának kiszámításához szükség van kerületi sebességének négyzetére, amit a mechanikai energia megmaradásának törvényéből határozhatunk meg:

$$mg\frac{r}{2}=\frac{1}{2}D(\Delta l_1)^2+\frac{1}{2}mv_1^2\,,$$

$$v_1^2=gr-\frac{D(\Delta l_1)^2}{m}=1{,}73\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\,.$$

A centripetális gyorsulás:

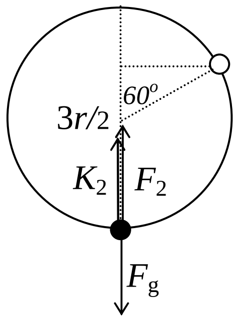
$$a_{\mathrm{cp},1}=\frac{v_1^2}{r}=8{,}63\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

A test gyorsulása pedig:

$$a_1=\sqrt{a_{\mathrm{cp},1}^2+a_{\mathrm{é},1}^2}=11{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

b) Amikor a test a pálya legalsó pontján van, a rugó megnyúlása a sugárral egyenlő, a rugó által kifejtett erő így:

$$F_2=D\cdot r\,.$$



A test centripetális gyorsulásának kiszámításához most is a mechanikai energia megmaradási törvényéből indulunk ki:

$$mg\cdot\frac{3r}{2}=\frac{1}{2}Dr^2+\frac{1}{2}mv_2^2\,,$$

$$v_2^2=3gr-\frac{Dr^2}{m}=4{,}4\ \frac{m^2}{s^2}\,.$$

A centripetális gyorsulás:

$$a_{\mathrm{cp},2}=\frac{v_2^2}{r}=22\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Mivel az összes erő függőleges irányú, ezért a testnek csak centripetális gyorsulása van. A testre ható kényszererő nagyságát a dinamika alaptörvényéből határozzuk meg:

$$F_2+K_2-F_{\mathrm{g}}=ma_{\mathrm{cp}}\,.$$

Átrendezve és behelyettesítve, a testre függőlegesen felfelé ható kényszererő nagysága:

$$K_2=m\cdot\left(g+a_{\mathrm{cp2}}\right)-D\cdot r=12\,\mathrm{N}.$$

A test tehát **12 N** nagyságú, függőlegesen lefelé mutató erőt fejt ki a pályára.

3. Két, azonos anyagból készült zsákba különböző mennyiségű babot teszünk. Az egyik zsákot egy lejtő tetejére helyezzük, majd elengedjük. A lejtő egy rövid szakaszon törésmentesen illeszkedik egy vízszintes pályához.
A lejtőn lecsúszó zsák tökéletesen rugalmatlanul ütközik a vízszintes pálya elején álló másik zsákkal. Amikor a nagyobb zsákot indítjuk a lejtő tetejéről, akkor a vízszintes pályán kétszer akkora utat tesznek meg a zsákok együtt, mint amikor a kisebb zsákot indítjuk. Mekkora a két zsák tömegének aránya? (A súrlódásos együtthatók mindenhol azonosak.)

(Simon Péter, Pécs)

Megoldás:
Adat: $s_2 : s_1 = 2$.

A zsákok azonos sebességgel érkeznek a lejtő aljára: v_0.

A két rugalmatlan ütközés után a zsákok közös sebessége:

$$v_{k1} = \frac{m}{M+m} v_0 \,,\; v_{k2} = \frac{M}{M+m} v_0 \,.$$

A vízszintes pályán lassuló zsákok gyorsulása: a.

A fékút a két esetben:

$$s_1 = \frac{v_{k1}^2}{2a} \,, \qquad s_2 = \frac{v_{k2}^2}{2a} \,.$$

A két út hányadosát felírva:

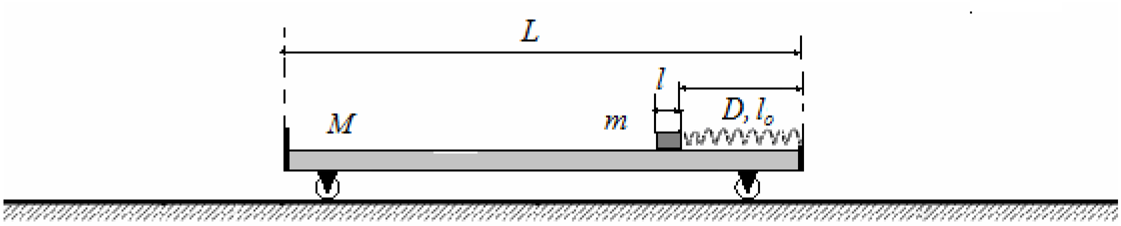
$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{v_{k2}^2}{v_{k1}^2} = \left(\frac{M}{m}\right)^2 .$$

A két zsák tömegének aránya: $\frac{M}{m} = \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} = \sqrt{2}$.

4. Egy m tömegű, l hosszúságú téglatest súrlódásmentesen mozoghat egy könnyen gördülő, M = 3m tömegű, L hosszúságú kiskocsin, annak hossztengelyében. A kiskocsi egyik végéhez a kocsi hossztengelyében lévő l_o hosszúságú, D rugóállandójú rugó egyik végét rögzítették. Az x hosszúsággal összenyomott rugó másik végéhez illesztették a téglatestet. Amikor a rendszer állt, elengedték a téglatestet és a kocsit.

a) Mekkora a téglatest sebessége, amikor elhagyja a rugót?

b) A rugó elhagyásától számítva mennyi idő alatt ért a téglatest a kocsi végéhez?



Adatok: m = 0,2 kg, M = 3m, D = 60 N/m, L = 1 m, l_o = l = 10 cm, és x = 4 cm, a kocsi és a talaj között nincs súrlódás.

(Zsigri Ferenc, Budapest)

Megoldás:

a.)

A „kilövési” folyamatban a lendület és a mechanikai energia megmarad.
A lendület megmaradás törvény alapján (V lesz a kocsi sebessége):

$$0 = mv + MV, \qquad V = -v/3.$$

A mechanikai energia megmaradás alapján:

$$Dx^2/2 = mv^2/2 + MV^2/2, \qquad Dx^2 = mv^2 + 3mv^2/9 = 4mv^2/3.$$

Ezzel: $v = \sqrt{\dfrac{3Dx^2}{4m}} = \dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{3D}{m}} = \left(\dfrac{0{,}04}{2}\sqrt{\dfrac{3\cdot 60}{0{,}2}}\right)\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}6\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

b.)

A téglatest a kiskocsihoz képest $v + V$ sebességgel mozog. Az ütközésig megtett útja $L - l_o - l$.
Tehát az eltelt idő:

$$t = (L - l_o - l)/(v + V) = (1 - 0{,}2)/(0{,}6 + 0{,}2)\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{s}.$$

Gimnázium 10. évfolyam

1. H = 80 m magas torony tetejéről egy pontból egyszerre hajítunk el két kisméretű súlyos testet, egyiket függőlegesen felfelé, a másikat függőlegesen lefelé, mindkettőt 10 m/s nagyságú sebességgel.

a) Milyen messze lesznek egymástól t_1 = 3 s múlva?

b) Milyen messze lesznek egymástól, amikor a lefelé hajított test földet ér?

c) Indítástól számítva mennyi idő múlva éri el a felfelé indított test az alsó testet, ha az utóbbi

α) abszolút rugalmatlanul,

β) abszolút rugalmasan ütközik a merev talajjal?

(A légellenállást hanyagoljuk el.)

(Holics László, Budapest)

Megoldás:

a) A két testre egyformán hat a nehézségi erő, sebességüktől (és így kezdősebességüktől is) függetlenül azonos irányú, g gyorsulással mozognak, vagyis egymáshoz képest nem gyorsulnak. Így, ha pl. az alsó testre helyezzük a koordinátarendszert, abban az nyugszik, a felső pedig egyenes vonalú egyenletes mozgást végez v_{rel} = 20 m/s nagyságú sebességgel. A távolságuk tehát 3 másodperc múlva

$$d_1 = v_{\mathrm{rel}} t_1 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 3\ \mathrm{s} = \mathbf{60\,m}$$

lesz. Meg kell vizsgálni, hogy nem ér-e le hamarabb a lefelé indított test, vagyis milyen magasan tartózkodik ekkor. Itt már a talajhoz rögzített koordinátarendszert célszerű használnunk (bár maradhatnánk az eredeti rendszerünknél, amelyben g gyorsulással emelkedik a talaj).

A torony tetejétől mért elmozdulás (ami a *b)* kérdéshez is szükséges):

$$s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 3\ \mathrm{s} + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 9\ \mathrm{s}^2 = 75\ \mathrm{m},$$

azaz a lefelé indított test a kérdéses pillanatban még nem ütközött a talajnak, az *a)* kérdésre adott válaszunk helyes.

b) A földetérésig a két test távolságát úgy számíthatjuk, mint az *a)* megoldásnál, hiszen földetérésig nem változnak a gyorsulások. Ehhez ismernünk kell a lefelé indított test talajt éréséig eltelt t_2 időt. A négyzetes úttörvényből könnyen megkapjuk:

$$H = v_0 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2.$$

Ezt t_2-re rendezve:

$$\frac{1}{2} g t_2^2 + v_0 t_2 - H = 0,$$

adatainkkal:

$$5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t_2^2 + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t_2 - 80\ \mathrm{m} = 0,$$

aminek a megoldása:

$$t_2 = \frac{-10 \pm \sqrt{100+1600}}{10}\ \mathrm{s} = 3{,}123\ \mathrm{s}.$$

A két test közötti távolság ekkor:

$$d_2 = v_{\mathrm{rel}} t_2 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 3{,}123\ \mathrm{s} = \mathbf{62{,}46\,m.}$$

(A felfelé indított test ekkor már lefelé halad.)

c) *α)* Ha abszolút rugalmatlanul ér földet a lefelé indított test, akkor az a leérkezés helyén nyugalomban marad. A találkozásig eltelt idő annyi, amennyi idő alatt a H magasságból felfelé indított test eléri a talajt.
Egyszerűen eljárhatunk, ui. a felfelé indított test ugyanakkora sebességgel érkezik a H magas torony tetejéig, amivel felfelé indítottuk, ám ez megegyezik a lefelé indított test sebességével, ezért mozgásának a H-tól földet érésig eltelt idejét a *b)* kérdésre adott válaszból tudjuk. Csak a v = 10 m/s sebességgel felfelé hajított test hajítás-idejét kell meghatároznunk, hiszen ennyivel később tette meg az utat a földig a felfelé hajított test. Így tehát a felfelé és lefelé indított testek leérkezési időkülönbsége:

$$\Delta t = t_{\text{haj}} = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2\text{s}.$$

Az indítástól a találkozásig eltelt idő ebben az esetben:

$$t_{\text{tal.1}} = t_2 + \Delta t = 3{,}123 \text{ s} + 2 \text{ s} = \mathbf{5{,}123\ s.}$$

β) Ez már egészen más szituáció, ugyanis a talajról abszolút rugalmasan visszapattanó test felfelé haladva sokkal hamarabb éri el a lefelé zuhanó testet, hiszen visszafordulva a talaj fölött találkozik a lefelé érkezővel.
A talajról az abszolút rugalmas ütközés után akkora sebességgel pattan vissza a test, amekkorával érkezett:

$$v' = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = \sqrt{100\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 80 \text{ m}} = 41{,}23\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Milyen h magasan van a talajtól (az éppen visszapattanó testtől) most a felfelé indított test? Ezt határoztuk meg a *b)* kérdésre adott válaszban! Távolságuk ekkor h = 62,46 m.
Ezt kell megtenni „a szabadon eső koordinátarendszerben” egymáshoz viszonyított egyenes vonalú egyenletes mozgással.
Mekkora a felfelé *indított* test sebessége ekkor?

$$v_2 = v_0 - gt_2 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 3{,}123 \text{ s} = -21{,}23\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A relatív sebesség a visszapattanáskor:

$$v'_{\text{rel}} = v' - v_{\text{le}} = 41{,}23\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-21{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 62{,}43\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

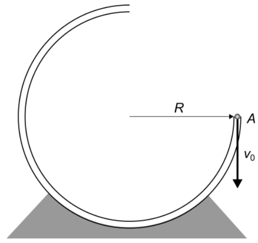
Az új relatív sebességgel számolva a találkozási idő a visszapattanástól mérve:

$$t' = \frac{h}{v'_{\text{rel}}} = \frac{62{,}46 \text{ m}}{62{,}43\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1 \text{ s}.$$

Az indítástól számítva ebben az esetben a két test már $t_2 + t'$ = 1 s + 3,123 s = **4,124 s** múlva találkozik.

2. Az ábra szerint rögzített, 3/4 körívnyi, R = 0,5 m sugarú cső A pontjából indítunk egy kisméretű testet, amely a csőben végigcsúszik. A súrlódás elhanyagolható.

a) Mekkora sebességgel indítsuk, hogy mozgása során visszajusson az A pontba?
b) Milyen irányból érkezik a kis test?
c) Mekkora az indítási és érkezési sebességek nagyságának aránya?



(Holics László, Budapest)

Megoldás:

A folyamat lényeges része egy vízszintes hajítás, amelynek „magassága” is, „távolsága” is *R*. Ez határozza meg az előzményeket, tehát „visszájáról” kell megoldani a feladatot: mekkora v_1 sebességgel kell indulnia a kis testnek a pályája legfelső pontjából, hogy onnan parabola pályáján éppen A-ba érjen. Ez határozza meg az indítási sebességet is.

a) A követelmény szerint tehát a vízszintes irányra:

$$R = v_1 t\,, \tag{1}$$

a függőleges irányra:

$$R = \frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

Az esésidőt kiküszöbölve (1)-ből : $t = \dfrac{R}{v_1}$,

ezt (2)-be írva: $R = \dfrac{1}{2} g \dfrac{R^2}{v_1^2}$,

innen a vízszintes hajítás igényelt sebessége:

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR}{2}}\,,\ v_1 = 1{,}58\ \text{m/s}.$$

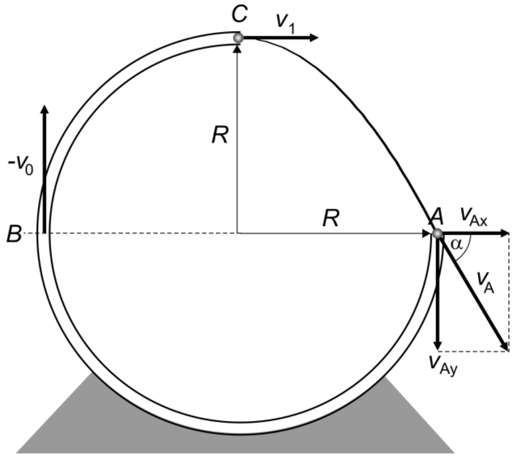
A konzervatív rendszer (mechanikai energia-megmaradás) miatt az A pontbeli v_0 lefelé való indítási sebesség nagysága megegyezik a szemközti, azonos magasságbeli B pontban felvett sebesség nagyságával, tehát elegendő a BC szakaszon végbemenő mozgást vizsgálni. Felírjuk azt az egyenletet, amelyben szerepel a keresett, az A pontbeli indítási sebesség. A munkatétel (v. energiamegmaradás-tétel) szerint:

$$-mgR = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Innen a keresett indítási sebesség néhány átalakítás után:

$$-2gR = v_1^2 - v_0^2 \quad \rightarrow \quad v_0^2 = v_1^2 + 2gR = \frac{gR}{2} + 2gR = \frac{5}{2} gR.$$

Innen: $v_0 = \sqrt{\dfrac{5gR}{2}}\,, v_0 = 3{,}53\ \text{m/s}.$



b) A vízszintes hajítási pálya az A ponton megy át. Az érkezési sebesség *x* komponense megegyezik a legfelső (C) pontban elért sebességével, azaz

$$v_{\mathrm{Ax}} = v_1,$$

a leérkezési sebesség y komponensének nagysága:

$$v_{\mathrm{Ay}} = \sqrt{2gR}\,,\quad v_{Ay} = 3{,}16\ \mathrm{m/s}\,.$$

A beérkezés iránya a sebességének a vízszintessel bezárt szögével (is) megadható. Ennek tangenséből:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_{\mathrm{Ay}}}{v_{\mathrm{Ax}}} = \frac{\sqrt{2gR}}{\sqrt{\dfrac{gR}{2}}} = \sqrt{4} = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\,2 = \mathbf{63{,}43°}$$

c) A beérkezési és indítási sebességek aránya nyílván 1, hiszen a rendszer konzervatív, és a test csak ezen erők hatása alatt tért vissza kiindulási helyére.

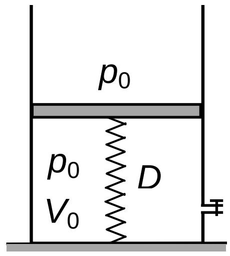
(Ellenőrzés: a beérkezési sebesség akár a komponenseinek négyzetösszegéből, akár az egyik komponens és a hajlásszög felhasználásával kapható:

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{gR}{2} + 2gR} = \sqrt{\frac{5}{2}gR},$$

vagy

$$v_A = \frac{v_{Ax}}{\cos\alpha} = \frac{1{,}53\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}447} = 3{,}53\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.)$$

3. Függőleges, alul zárt hengerben lévő súlytalan, súrlódásmentesen mozgó dugattyú alatt a külső légnyomással megegyező, p_0 = 10^5 Pa nyomású, V_0 = 8 dm^3 térfogatú ideális gáz van. A dugattyút az A = 2 dm^2 keresztmetszetű henger aljával egy D = 1000 N/m direkciós erejű rugó köti össze. Egy fizikai kísérlet során a hengeren lévő csapon keresztül a gáz tömegét 50%-kal, a Kelvin-skálán mért hőmérsékletét pedig melegítéssel 60%-kal megnöveljük.



a) Határozzuk meg a gáz térfogatát és nyomását a változások után!

b) Mennyivel nőtt meg a rendszer mechanikai energiája, ha a gáz helyzeti energiájának növekedését elhanyagoljuk?

(*Kotek László, Pécs*)

Megoldás:

a) Legyen a gáz kezdeti hőmérséklete T_0, tömege m_0, a változtatások utáni nyomása p_1, térfogata V_1, a dugattyú elmozdulása y! Ahol:

$$p_1 = p_0 + \frac{Dy}{A},$$

$$V_1 = V_0 + Ay\,.$$

Az állapotegyenletet a két állapotra felírva:

$$p_0V_0 = \frac{m_0}{M}RT_0,$$

$$p_1V_1 = \frac{1{,}5m_0}{M}R\cdot 1{,}6T_0.$$

p_1 és V_1 értékét az utóbbiba beírva, illetve a $p_0 V_0 = \frac{m_0}{M} R T_0$ összefüggést felhasználva:

$$\left(p_0 + \frac{Dy}{A}\right)(V_0 + Ay) = 2{,}4\, p_0 V_0 .$$

Ezt alakítva:

$$Dy^2 + \left(\frac{DV_0}{A} + p_0 A\right) y - 1{,}4\, p_0 V_0 = 0.$$

Az adatokat SI-ben beírva:

$$10y^2 + 24y - 11{,}2 = 0,$$

$$y = 0{,}4 \text{ m}.$$

A gáz térfogata és nyomása a változtatások után:

$$\boxed{V_1 = V_0 + Ay = 16 \text{ dm}^3,}$$

$$\boxed{p_1 = p_0 + \frac{Dy}{A} = 1{,}2 \cdot 10^5 \text{ Pa}.}$$

b) A mechanikai energia növekedése a rugó végállapotbeli rugalmas energiájával egyezik meg:

$$\boxed{\Delta E_{\text{mech.}} = \frac{1}{2} Dy^2 = 80 \text{ J}.}$$

4. Egy m tömegű, Q töltésű pontszerű testet a földi gravitációs mezőben v_0 vízszintes sebességgel indítunk el. Az indítás helye alatt h mélységben egy nagy kiterjedésű, sík, vízszintes szigetelő lap található, és ezzel párhuzamosan $d > h$ távolságban egy másik. A lapok egymás felé néző oldalai egyenletesen fel vannak töltve. A felső lap negatív, az alsó lap pozitív, és a töltésük abszolút értéke megegyezik. A lapok vastagsága elhanyagolható, azonos a felületek nagysága, és egymáshoz képest nincsenek eltolva.

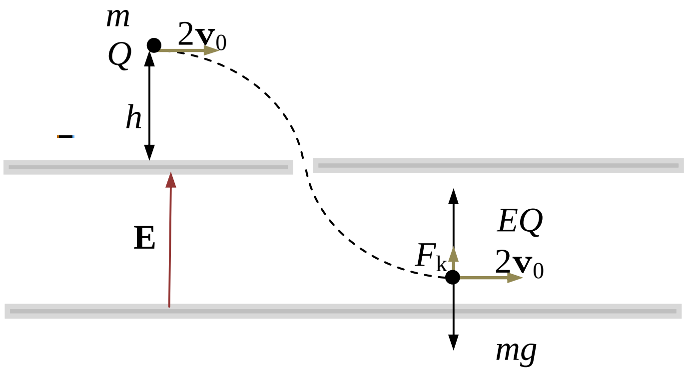
a) Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt érkezik a test a felső laphoz?

b) A laphoz érkezés helyén az elhajított test egy elhanyagolható méretű résen át a lapok közé lép. Mekkora a lapok közötti térerősség, ha a lapok fölött leírt és a lapok között kialakult pálya alakja megegyezik (azaz a két pályarész a résre középpontosan tükrös)?

c) Az előző szabad pályát kihajlítjuk egy vékony szigetelő szálból, és az előző kezdőpontban $2v_0$ kezdősebességgel vízszintesen elindítunk rajta egy Q töltésű, m tömegű pontszerű gyöngyöt, amely a pályán súrlódás nélkül végigcsúszik. Mekkora a kényszererő a pálya legalsó pontjában? (Az új pálya természetesen rögzített, a régi környezetben van, és az előző pályára illeszkedik.)

(Koncz Károly, Pécs)

Megoldás:



a)

Mivel a lemezeken kívül nincs elektromos mező:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \quad v_0 = \sqrt{2gh} \, .$$

b)

A két térrészben a vízszintes mozgások megegyeznek, így a pályák egyezésének feltétele, hogy a függőleges gyorsulások egymásnak mínusz egyszeresei legyenek. Figyelembe véve az erőhatásokat:

$$EQ - mg = mg \, ,$$

$$E = \frac{2mg}{Q} \quad .$$

c)

A legalsó pontban a sebesség a munkatétel alapján:

$$\sum W = \Delta E_{\text{kin.}} \, .$$

$$mg \cdot 2h - EQh = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m (2v_0)^2 \, .$$

Felhasználva, hogy $EQ = 2mg$, adódik:

$$v = 2v_0.$$

(Ez a munkatétel nélkül is meghatározható, figyelembe véve a két pályaszakasz azonos voltát, valamint a két környezet egyenértékűségét.)

A dinamika alapegyenlete alapján:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \, ,$$

$$EQ + F_\text{k} - mg = m\frac{v^2}{r} \, .$$

Használjuk fel, hogy $EQ = 2mg$. Ekkor:

$$F_\text{k} = m\frac{v^2}{r} - mg \, .$$

A görbületi sugár meghatározása az első mozgás kezdőpillanata alapján történik:

$$g = \frac{v_0^2}{r},$$

$$r = \frac{v_0^2}{g}.$$

Az előzőeket összefoglalva: $F_\mathrm{k} = m\frac{(2v_0)^2}{r} - mg = 4mg - mg = 3mg$.

Szakközépiskola 9. évfolyam

1. Mekkora kezdősebességgel hajítottuk el vízszintesen azt a testet, amelyiknek 3 s múlva 15 m/s-mal nagyobb a sebessége?

(Kirsch Éva, Debrecen)

Megoldás:

Legyen a kezdeti sebesség v_0, ami vízszintesen változatlan marad. Függőlegesen 3 másodperc alatt 30 m/s sebességre tesz szert.

A test teljes sebessége: $v = \sqrt{v_0^2 + \left(30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}$.

A feladat feltétele szerint $v_0 + 15\frac{m}{s} = \sqrt{v_0^2 + \left(30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}$.

Négyzetre emelve és megoldva az egyenletet:

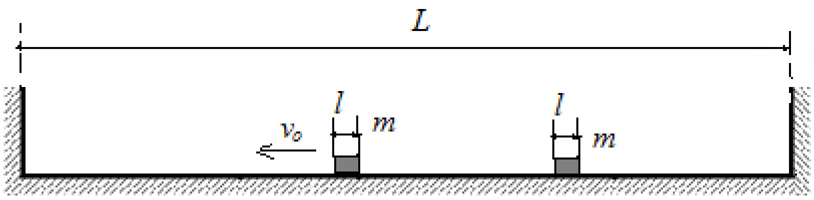
$$v_0^2 + v_0 \cdot 30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 225\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = v_0^2 + 900\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$v_0 \cdot 30 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 675\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Ebből: v_0 = 22,5 m/s.

2. Vízszintes helyzetű, *L* hosszúságú, rögzített sín két végén ütköző van. A sínen két azonos *m* tömegű, azonos *l* hosszúságú téglatest súrlódásmentesen tud mozogni. Kezdetben az egyik áll, a másik tőle v_o kezdősebességgel távolodik. Mozgás közben a testek egymással és az ütközővel is tökéletesen rugalmasan ütköznek. A testek ütközésének időpontjait sorban feljegyezzük. Mennyi idő telt el a testek első és harmadik ütközése között?

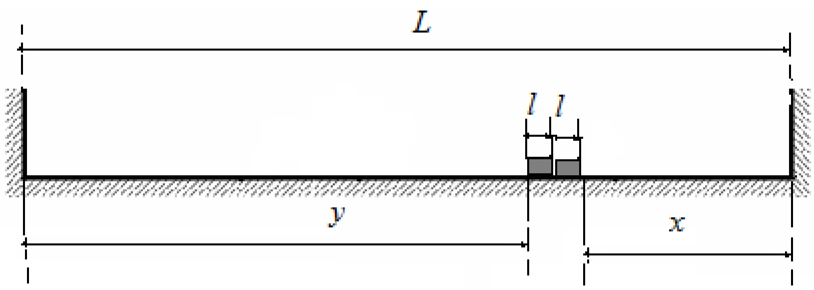
Adatok: *L* = 2*m*, *l* = 0,1 m és v_o = 1,5 m/s.



(Zsigri Ferenc, Budapest)

Megoldás:

A végeknél a testek sebességének iránya pillanatszerűen ellentétesre változik, egymással való ütközéskor szintén pillanatszerűen felcserélődik. Tehát a testek egymással való ütközései mindig a kezdetben álló test helyén következnek be.



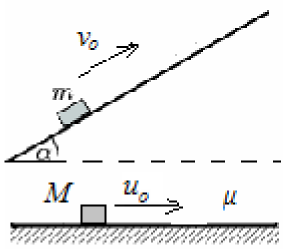
A jobb oldali test két egymást követő ütközés közt megtett útja 2*x*, a baloldalié 2*y*. Mivel mindkettő azonos sebességgel halad, ezért a keresett idő:

$$t = (2x + 2y)/v_o = 2(x + y)/v_o.$$

Mivel $L = x + y + 2l$, ezért $x + y = L - 2l$, ezzel:

$$t = 2(L - 2l)/v_o = 2(2 - 0{,}2)\ \text{m}/(1{,}5\ \text{m/s}) = 2{,}4\ \text{s}.$$

3. Egy $\alpha = 30^o$-os lejtőn egy *m* tömegű test súrlódásmentesen mozoghat. A lejtő alatt egy vízszintes felületen egy *M* tömegű test van. A test és a felület között a csúszási súrlódás együtthatója μ. Mekkora legyen μ és az alsó test u_o kezdősebessége, hogy a felső test v_o = 2 m/s kezdősebességű indítása után a felső test megállásáig az alsó test folyamatosan a felső test alatt (a felső merőleges vetületében) legyen?



(Zsigri Ferenc, Budapest)

Megoldás:

Egy lassuló test útja a megállásig $s = v_o t - \frac{a}{2}t^2$, itt „*a*” a gyorsulás nagysága.

A vízszintes felületnél $a = \mu g$, a kezdősebesség pedig u_0. Megtett útja az eltelt idő függvényében:

(1) $$s = u_o t - \frac{\mu g}{2}t^2 .$$

A lejtőn lévő test gyorsulása $g\sin\alpha$, iránya a lejtő mentén lefele mutat. Bontsuk függőleges és vízszintes összetevőkre! A vízszintes összetevő $g\sin\alpha\cos\alpha$. A vetület kezdősebessége $v_o\cos\alpha$. Felhasználtuk, hogy a sebesség és a gyorsulás is vektor. Ezzel a vetület „útja”:

(2) $$s = v_o t\cos\alpha - \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{2}t^2 .$$

Akkor lesz az alsó test folyamatosan a felső alatt, ha bármely *t*-re azonos az általuk megtett *s* út, és ha már kezdetben is alatta volt.
A két másodfokú függvény akkor azonos, ha *t* és t^2 együtthatói egyenlők, tehát:
$u_o = v_o\cos\alpha \approx 1{,}732$ m/s és $\mu g = g\sin\alpha\cos\alpha$, azaz $\mu = \sin\alpha\cos\alpha \approx 0{,}433$.

4. Két, azonos anyagból készült zsákba különböző mennyiségű babot teszünk. Az egyik zsákot egy lejtő tetejére helyezzük, majd elengedjük. A lejtő egy rövid szakaszon törésmentesen illeszkedik egy vízszintes pályához.
A lejtőn lecsúszó zsák tökéletesen rugalmatlanul ütközik a vízszintes pálya elején álló másik zsákkal. Amikor a nagyobb zsákot indítjuk a lejtő tetejéről, akkor a vízszintes pályán kétszer akkora utat tesznek meg a zsákok együtt, mint amikor a kisebb zsákot indítjuk. Mekkora a két zsák tömegének aránya? (A súrlódásos együtthatók mindenhol azonosak.)

(Simon Péter, Pécs)

Megoldás:

Ugyanaz, mint Gimnázium 9. évfolyam 3. feladata.

Szakközépiskola 10. évfolyam

1. H = 80 m magas torony tetejéről egy pontból egyszerre hajítunk el két kisméretű súlyos testet, egyiket függőlegesen felfelé, a másikat függőlegesen lefelé, mindkettőt 10 m/s nagyságú sebességgel.

a) Milyen messze lesznek egymástól t_1 = 3 s múlva?

b) Milyen messze lesznek egymástól, amikor a lefelé hajított test földet ér?

c) Indítástól számítva mennyi idő múlva éri el a felfelé indított test az alsó testet, ha az utóbbi test abszolút rugalmatlanul ütközik a talajjal?

(A légellenállást hanyagoljuk el.)

(*Holics László, Budapest*)

Megoldás:

Ugyanaz, mint Gimnázium 10. évfolyam 1. feladata a, b, c, feladatrészei.

2. Egy 45 fokos, 5 méter hosszú lejtő 10 méter hosszú lankásabb, 30 fokos hajlásszögű lejtőben folytatódik. A lejtők illeszkedése törésmentes.

a) Mekkora sebességgel érkezik az álló helyzetből induló kisméretű test az első lejtő aljára 5 méter megtétele után, ha ezen a szakaszon a csúszási súrlódási együttható 0,5?

b) Mekkora a második szakaszt jellemző csúszási súrlódási együttható, ha a lejtő alján a test éppen megáll?

(Csányi Sándor, Szeged)

Megoldás:

a)

Az első szakaszon:

$$a_1 = g(\sin\alpha_1 - \mu_1 \cos\alpha_1) = 3{,}54\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$l = \frac{a_1}{2} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_1}} = 1{,}68\ \text{s},$$

$$v_1 = a_1 t_1 = \underline{\underline{5{,}95\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

b)

A második szakaszon:

$$v_{20} = v_1,$$

$$l = \frac{v_{20} \cdot t_2}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{2 \cdot l}{v_{20}} = 3{,}36\ \text{s},$$

$$a_2 = \frac{-v_{20}}{t_2} = -1{,}77\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_2 = g(\sin\alpha_2 - \mu_2 \cos\alpha_2) \Rightarrow \mu_2 = \frac{g \sin\alpha_2 - a_2}{g\cos\alpha_2} = 0{,}782\,.$$

3. Egy l hosszúságú, vízszintes helyzetű zárt csőben kezdetben p_1 nyomású és T_1 hőmérsékletű levegő foglal helyet. A cső fala hőszigetelt, záró lapjai hőáteresztők. A gázt melegíteni kezdjük úgy, hogy a cső egyik végét T_2, a másikat T_1 hőmérsékleten tartjuk $(T_2 > T_1)$. Ha kellő ideig várunk, a csőben a gáz állapota stacionárius, azaz egy adott helyen a gáz állapotának jellemzői időben állandó értéken maradnak. Ekkor a nyomás a kezdeti értékének az 1,174-szerese, és a cső hossza mentén lineáris hőmérsékletesés alakul ki.

a) Adjuk meg képletben a hőmérséklet és sűrűség hely szerinti függését!

b) Számítsuk ki numerikusan a cső két végén lévő gáz sűrűségek hányadosát az új állapotban!

Adatok: $p_1 = 10^5$ Pa, $T_1 = 273$ K, $T_2 = 373$ K, $l = 0{,}5$ m, $M_{\text{levegő}} = 29$ g/mol.

(Wiedemann László, Budapest)

Megoldás:

a)

Helyezzük el a koordinátatengelyt a cső egyik alkotója mentén! Az origót rögzítsük a cső melegebb végéhez! A cső hossza mentén lineáris hőmérsékletesés alakul ki:

$$T(x) = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{l} \cdot x \ .$$

Behelyettesítve:

$$T(x) = 373\ K - 200\ \frac{K}{m} \cdot x \ .$$

Az állapotegyenlet segítségével fejezzük ki a nyomást az origótól x távolságra:

$$p_2 \Delta V = \frac{\Delta m}{M} RT(x),$$

$$\rho(x) = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{p_2 M}{RT(x)} = \frac{1{,}174 \cdot p_1 M}{R\left(T_2 - \left(\frac{T_2 - T_1}{l} \cdot x\right)\right)} = \frac{409{,}7\ \frac{\mathrm{kg \cdot K}}{\mathrm{m}^3}}{373\ \mathrm{K} - 200\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}} \cdot x} \ .$$

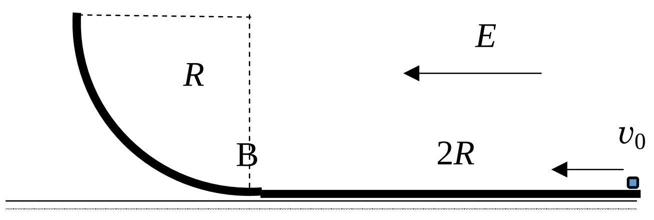
b)

$$\frac{\rho(l)}{\rho(0)} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{273}{373} = 0{,}732 \ .$$

4. Az ábra szerinti elrendezésben vízszintes, sík felületen elhelyezünk egy negyed körívben végződő szigetelő lemezt. A lemez alsó végére egy m tömegű, q pozitív töltésű kis testet teszünk. Az egész rendszer vízszintes, E térerősségű, homogén elektromos térben van. A lemez tömege $10 \cdot m$, és a hossza mentén egyenletesen oszlik el. A lemez a felületen nem csúszik meg, rajta a kis test súrlódási együtthatója elhanyagolható. ($m = 0{,}05$ kg, $R = 0{,}9$ m, $q = 5 \cdot 10^{-6}$ C, $E = 30\,000$ V/m, a negyed körív súlypontja a kör középpontjától $0{,}9 \cdot R$ távolságra van.) *Megjegyzés*: A kis test töltését tekintsük végig állandónak, és a szigetelő lemezben létrejövő polarizációtól tekintsünk el!

a) Mekkora v_0 kezdősebességgel indítottuk meg a kis testet, ha a hozzá húzott sugár a függőlegessel éppen 60°-os szöget zár be, amikor a lemez megbillen?

b) Mekkora a nyomóerő megváltozása a B ponton való keresztülhaladáskor?

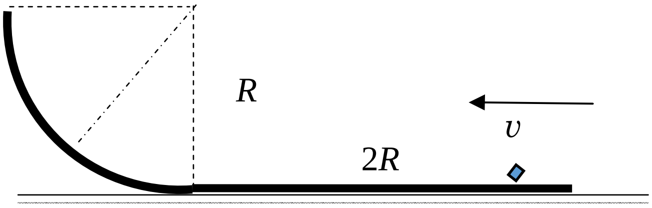


(Mező Tamás, Szeged)

Megoldás:

a)
A negyed körív és az egyenes szakasz tömege:

$$m_{\text{ív}} = \frac{10 \cdot m}{2 \cdot R + \frac{R \cdot \pi}{2}} \cdot \frac{R \cdot \pi}{2} = 0,22 \text{ kg}, \quad m_{\text{e}} = 10 \cdot m - m_{\text{ív}} = 0,28 \text{ kg}.$$



A dinamika alaptörvénye a határesetre:

(1) $F_{\text{ny}} - mg \cdot \cos\alpha - Eq \cdot \sin\alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$.

A határesetben a szigetelőlemezre ható forgatónyomatékok egyensúlya a B pontra nézve:

(2) $m_{\text{ív}} \cdot g \cdot 0{,}9 \cdot R \cdot \sin 45^\circ + F_{ny} \cdot R \cdot \sin\alpha = m_e \cdot g \cdot R$

Az energiák megmaradása:

(3) $\frac{1}{2} m v_0^2 + Eq \cdot (2R + R \cdot \sin\alpha) = \frac{1}{2} m v^2 + mg \cdot (R - R \cdot \cos\alpha)$

Az egyenletrendszerben három ismeretlen van: F_{ny}, v_0 és v.
A második egyenletből: $F_{\text{ny}} = 1{,}62$ N; az elsőből $v = 4{,}71$ m/s;
A harmadikból: $v_0 = 3{,}96$ m/s (ennél éppen nagyobbnak kell lennie!)…
b)

$$\frac{1}{2} \cdot m v_0^2 + E \cdot q \cdot 2R = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{B}}^2 \qquad \Rightarrow v_{\text{B}} = 5{,}15 \text{ m/s}$$

$$\Delta F_{\text{nyB}} = F_{\text{nyB után i}} - F_{\text{nyB elő}} = mg + m\frac{v_{\text{B}}^2}{R} - mg = m \cdot \frac{v_{\text{B}}^2}{R} \approx 1{,}47 \text{ N}.$$