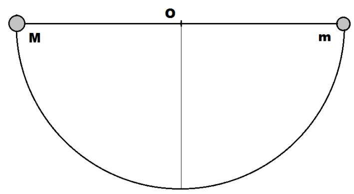
A 2012/2013. évi Mikola Sándor tehetségkutató verseny gyöngyösi döntőjének feladatai és megoldásai.

Gimnázium, 9. osztály



G1. Két egyenlő, *l* hosszúságú fonálra rögzített *M* és *m* tömegű kisméretű, golyó alakú testet vízszintesig kitérítünk, majd egyszerre elengedünk. A testek ezután centrálisan ütköznek.

a) Milyen *M*/*m* tömegarány esetén fog az *m* tömegű test eljutni a fonál által lehetővé tett legnagyobb magasságig?

b) Milyen magasra jut el ebben az esetben a *M* tömegű test?

Az ütközést tekintsük tökéletesen rugalmasnak!

(Kiss Miklós)

Megoldás. Haladjon az *M* tömegű test v_1 sebességgel, az *m* tömegű test v_2 sebességgel. Legyen pozitív az első test sebességének iránya.

Ekkor a tömegközéppont sebessége: $v_{\text{TKP}} = \dfrac{Mv_1 - mv_2}{M+m}$.

Térjünk át a tömegközépponti rendszerbe. Itt a sebességek:

$$u_1 = v_1 - v_{TKP},$$
$$u_2 = -v_2 - v_{TKP}$$

Ütközés után a sebességek:

$$u_1' = -u_1 = -v_1 + v_{TKP},$$
$$u_2' = -u_2 = v_2 + v_{TKP}.$$

Visszatérve az eredeti vonatkoztatási rendszerbe:

$$v_1' = -u_1 + v_{TKP} = -v_1 + 2v_{TKP},$$
$$v_2' = -u_2 + v_{TKP} = v_2 + 2v_{TKP}.$$

$R = l$. A testek vízszintes helyzetből indulva $v = \sqrt{2gR}$ sebességgel egyszerre érkeznek az alsó ponthoz. Ezért a tömegközéppont sebessége:

$$v_{TKP} = \frac{Mv - mv}{M+m} = \frac{M-m}{M+m}v$$

Ez alapján a testek ütközés utáni sebessége:

$$v_1' = -v + 2v_{TKP} = -v + 2\frac{M-m}{M+m}v = \frac{M-3m}{M+m}v$$
$$v_2' = v + 2v_{TKP} = v + 2\frac{M-m}{M+m}v = \frac{3M-m}{M+m}v$$

a) A második test akkor halad át a körpálya legfelső pontján, ha $mg \le m\dfrac{v'^2}{R}$, ahol v' a sebesség a legfelső pontban. Az energiamérleg:

$$\frac{1}{2}mv_2'^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + mg2R$$

Az utóbbi kettő alapján: $v_2'^2 \ge 5gR$. Összehasonlítva v_2'-re kapott két kifejezést, v értékét figyelembe véve:

$$\sqrt{5gR} \le \frac{3M-m}{M+m}\sqrt{2gR},$$

ebből

$$\sqrt{\frac{5}{2}} \le \frac{3\frac{M}{m} - 1}{\frac{M}{m} + 1}.$$

Ebből $$\frac{M}{m} \geq \frac{1+\sqrt{2,5}}{3-\sqrt{2,5}} = \frac{11+8\sqrt{2,5}}{13} \approx \mathbf{1,819}.$$

b) Az első test sebessége ilyen tömegarány esetén:

$$v_1' = \frac{M-3m}{M+m}v = \frac{\frac{M}{m}-3}{\frac{M}{m}+1}v = \frac{1,819-3}{1,819+1}v \approx -0,4189v = -0,4189\sqrt{2gR}\ .$$

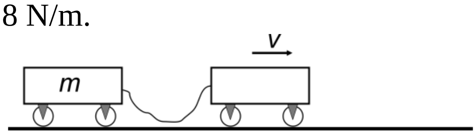
Ismét az energiamérleg alapján: $$Mgh = \frac{1}{2}Mv_1'^2.$$

Ebből $$h = 0,4189^2 R \approx \mathbf{0,175}\boldsymbol{R}..$$

G2. Két, könnyen gördülő kiskocsit vékony, kezdetben lazán lelógó gumiszál köt össze. Az ábrán a jobb oldali kocsit állandó, v = 1,2 m/s sebességgel húzzuk. A bal oldali, m = 2 kg tömegű kocsi a szál megfeszülése után megindul.

a) Mekkora munkát végzünk összesen addig, amíg a bal oldali kocsi utoléri a jobb oldalit?

b) Mekkora volt a gumiszál maximális hossza ezalatt, ha nyújtatlan állapotban l_0 = 96 cm volt és direkciós ereje D = 18 N/m.



(Holics László)

Megoldás. *a)* Mindaddig nem végzünk munkát, amíg a gumiszál meg nem feszül. Ezután a jobb oldali kocsi egyenletes sebességű mozgásban való tartásához változó nagyságú erőt kell kifejtenünk, amely a gumiszál által kifejtett pillanatnyi erővel együtt éppen zérus eredőt ad. Ennek az erőnek munkáját kell kiszámítanunk.

Helyezzük a koordinátarendszert az egyenletesen mozgó kocsira (inerciarendszer)! Innen nézve a bal oldali kocsi a gumiszál megfeszüléséig v = 1,2 m/s nagyságú állandó sebességgel halad balra, majd egy lassuló mozgás végén egy pillanatra megáll (ekkor leghosszabb a gumiszál) és megindul vissza. Egy idő múlva a gumiszál ismét laza lesz, többé nem fejt ki erőt a kocsikra, és a bal oldali kocsi most a jobb oldali kocsihoz viszonyított v = 1,2 m/s sebességgel közeledik a jobb oldali kocsi felé. Ettől a pillanattól ismét nem fejtünk ki erőt, vagyis nem végzünk munkát. A *talajhoz* viszonyítva most a hátsó kocsinak v' = $2v$ sebessége van, vagyis a munkatétel értemében akkora munkát végeztünk, amekkorával a hátsó kocsit álló helyzetből erre a sebességre gyorsítottuk. (Az álló kocsi energiája nem változott, noha *mi* az első kocsin végeztük a munkát!!) A gumiszál összes munkája 0 (laza állapotból laza állapotba került.). Így az általunk végzett munka amíg a hátsó kocsi utoléri az elsőt:

$$W = \frac{1}{2}m\left(2v\right)^2 = 2mv^2 = 2\cdot 2\ \text{kg}\cdot 1,2^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \mathbf{5,76\ J.}$$

b) A gumiszál akkor a leghosszabb, amikor a hátsó kocsi sebessége (a talajhoz viszonyítva) v = 1,2 m/s. Ekkor

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}D\left(\Delta l\right)^2,$$

ahonnan

$$\Delta l = v\sqrt{\frac{m}{D}} = 1,2\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{\frac{2\ \text{kg}}{18\frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0,4\ \text{m},$$

azaz a gumiszál leghosszabb mérete $l_{\text{max}} = l_0 + \Delta l = 0,96\ \text{m} + 0,4\ \text{m} = \mathbf{1,36\,m}$ volt.

G3. Vaslemezből készült kiskocsihoz egy kisméretű erős mágnes tapad. Együttes tömegük M = 0,5 kg. Három kísérletet végeztünk. Először a rakodófelületen, második esetben a rakodófelülethez alulról tapadva, harmadszor a kocsi függőleges oldalfalán helyeztük el a mágnest. Mindhárom esetben centrálisan ütköztettük egy D = 50 N/m rugóállandójú (direkciós erejű), végén rögzített, elhanyagolható tömegű rugóval. Kellő sebességgel indítva a kocsit az első esetben a rugó Δl_1 = 16 cm-es összenyomódásnál csúszott meg a mágnes, a második esetben ez az érték Δl_2 = 8 cm volt. Mekkora volt a rugó összenyomódása a harmadik esetben?

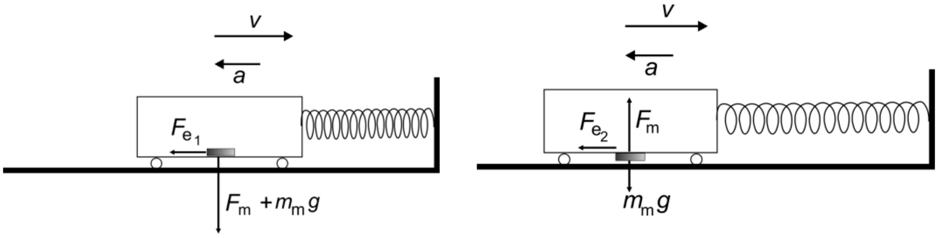
(Suhajda János)

Megoldás.

$$\text{1. eset: } a_1 = \frac{-D\Delta l_1}{m} = -16\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \tag{1}$$

$$\text{2. eset: } a_2 = \frac{-D\Delta l_2}{m} = -8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \tag{2}$$

A megcsúszás pillanatáig a kocsi és a mágnes közötti tapadási súrlódási erő biztosítja a mágnes fenti gyorsulásait.



1. eset 2. eset

Írjuk fel a mágnes által kifejtett F_m erőt a mágnesre ható $m_\text{m}g$ nehézségi erő x-szereseként:

$$F_\text{m} = x m_\text{m} g.$$

Ezzel az 1. esetben a mágnesre lefelé ható erő, ami a nyomóerő (kényszererő) nagyságával egyezik:

$$F_1 = F_m + mg = xmg + mg = (x+1)mg$$

Ugyanez a 2. esetben:

$$F_2 = F_m - mg = xmg - mg = (x-1)mg$$

A mágnes megcsúszásig együtt gyorsul a kocsival. Határesetben a mágnes gyorsulásai a két esetben (pozitív irányt a sebesség irányával azonosnak véve)

$$a_1 = \frac{\sum F_{\text{m}1}}{m_\text{m}} = \frac{-\mu_\text{t} m_\text{m} g\,(x+1)}{m_\text{m}} = -\mu_\text{t} g\,(x+1) \tag{3}$$

és

$$a_2 = \frac{\sum F_{\text{m}2}}{m_\text{m}} = \frac{-\mu_\text{t} m_\text{m} g\,(x-1)}{m_\text{m}} = -\mu_\text{t} g\,(x-1). \tag{4}$$

azaz

$$a_1 = -\mu_\text{t} g\,(x+1)$$
$$a_2 = -\mu_\text{t} g\,(x-1)$$

A két utóbbi egyenletet osztva:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(x+1)}{(x-1)}.$$

x-re rendezve:

$$a_1(x-1) = a_2(x+1) \quad \rightarrow \quad a_1 x - a_1 = a_2 x + a_2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}.$$

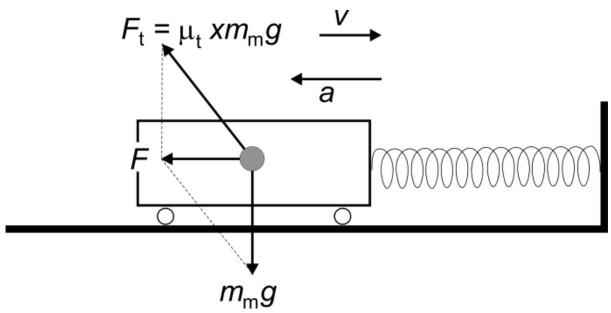
Beírva a gyorsulások (1) és (2)-beli számértékeit:

$$x=\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}=\frac{-16+(-8)}{-16-(-8)}=\frac{-24}{-8}=3,$$

azaz 3-szor nagyobb a mágnes vonzóereje,mint a súlya. Ezt felhasználva kapjuk az igényelt tapadási súrlódási együtthatót, pl. (3)-ból:

$$a_1=-\mu_\mathrm{t} g(x+1) \quad \rightarrow \quad \mu_\mathrm{t}=\frac{a_1}{-g(x+1)}=\frac{-16}{-10(3+1)}=0,4.$$

Most rátérhetünk a 3. esetre. Tekintsük az ábrát!



A mágnesre ható eredő erő a határesetben:

$$F=\sqrt{F_\mathrm{t}^2-m_\mathrm{m}^2 g^2}=m_\mathrm{m} g\sqrt{(\mu_\mathrm{t} x)^2-1}=m_\mathrm{m} g\sqrt{(0,4\cdot 3)^2-1}=0,663\cdot m_\mathrm{m} g$$

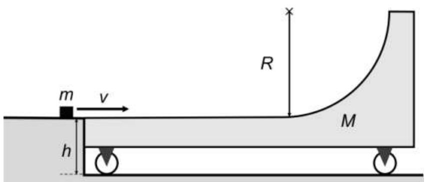
A mágnes (és a kocsi) gyorsulás nagysága ekkor:

$$a_3=\frac{F}{m_\mathrm{m}}=\frac{0,663\cdot m_\mathrm{m} g}{m_\mathrm{m}}=6,63\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

így a mozgásegyenlet a kocsi és mágnes rendszerére és a keresett deformáció abszolút értéke:

$$D\Delta l=ma_3 \quad \rightarrow \quad \Delta l_3=\frac{ma_3}{D}=\frac{0,5\ \mathrm{kg}\cdot 6,63\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{50\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}=0,0663\ \mathrm{m}=\mathbf{6,63\,cm.}$$

G4. Kezdetben nyugvó M = 3 kg tömegű, könnyen gördülő kiskocsira érintőlegesen csatlakozó R = 0,5 m sugarú, negyed körív keresztmetszetű lejtőt rögzítettünk az ábra szerint. A kocsi talajtól mért h = 0,45 m magasan levő platójára υ = 15 m/s sebességgel egy m = 2 kg tömegű kisméretű test csúszik.
Milyen távol lesz egymástól a kocsi és a kis test, amikor az éppen a talajra esik?
(Számoljunk g = 10 m/s^2-tel!)



(Holics László)

Megoldás. A feladat egy közönséges abszolút rugalmas ütközés esetére vezethető vissza. A kis test és a kocsi rendszere vízszintes irányban zárt, ezért egyenletes sebességgel mozog a tömegközéppontja. *Ebben a tömegközépponti rendszerben* ha a kis test sebessége elegendően nagy, a negyedkör elhagyásától kezdve függőleges hajítást végez, (ezalatt mindig a kocsi negyed körének felső pontja fölött marad), majd visszaesik, és ismét visszacsúszik a sima felületen. Ha nem hagyja el a negyed kört felcsúszása után, az impulzus-energia összefüggések változatlan formában érvényesek.
Az energia- és impulzus-megmaradás miatt olyan sebességekre tesznek szert a kocsi és a kis test, mint az abszolút rugalmasan egyenes centrálisan ütköző testek. Meghatározzuk, hogy a

megfelelő sebességekkel mozgó testek milyen messzire kerülnek egymástól a visszacsúszás utáni kocsi elhagyásának pillanatától a talajtérés pillanatáig. Ez utóbbit pedig a kocsi-plató magassága és a nehézségi gyorsulás határozza meg.
Számítások:
A tömegközéppont sebessége

$$v_{\mathrm{Tkp}} = \frac{mv + MV}{m + M} = \frac{mv}{m + M} = \frac{2\ \mathrm{kg} \cdot 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\ \mathrm{kg} + 3\ \mathrm{kg}} = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

A talajhoz viszonyított sebességek „az elnyújtott ütközés után":

$$u = (k+1)v_{\mathrm{Tkp}} - kv = 2 \cdot 6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

$$U = (k+1)v_{\mathrm{Tkp}} - kV = 2 \cdot 6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0 = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Az *egymáshoz viszonyított* sebességek (akár tömegközépponti rendszerben, akár a talaj rendszerében) e sebességek különbsége, vagyis

$$v_{\mathrm{rel}} = U - u = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(-3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

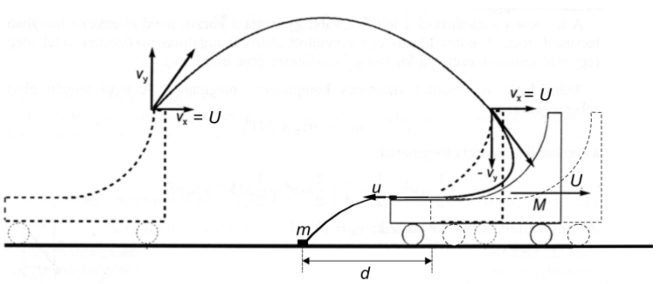
Ekkora sebességgel

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}45\,\mathrm{m}}{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}3\ \mathrm{s}$$

idő alatt $d = v_{\mathrm{rel}} \cdot t = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}3\ \mathrm{s} = \mathbf{4{,}5\ m}$-re

távolodtak el egymástól.

A kis test valóságos pályája a kocsi első elhagyásától a talajra érkezéséig:



A 2012/2013. évi Mikola Sándor tehetségkutató verseny gyöngyösi döntőjének feladatai és megoldásai.

Szakközépiskola, 9. osztály

SZ1. Egy tömör golyó h = 1,8 m magasról szabadon esik vízszintes talajra, ahol minden felpattanás alkalmával a leérkezéskor meglevő mozgási energiájának k = 20 %-át elveszti.

a) Milyen magasra jut a golyó az ötödik ütközés után?

b) Mekkora sebességgel érkezik a talajhoz a hatodik ütközés előtt?

(Holics László)

Megoldás. *a)* A golyó kezdeti helyzeti energiája:

$$E_0 = mgh_0$$

Ekkora mozgási energiával érkezik a talajra. Az első visszapattanás után marad:

$$E_1 = (1-k)E_0 = (1-k)mgh_0.$$

A következő ütközések során hasonlóképpen:

$$E_2 = (1-k)E_1 = (1-k)(1-k)mgh_0 = (1-k)^2 mgh_0.$$

$$\ldots$$

$$E_n = (1-k)^n E_0 = (1-k)^n mgh_0.$$

Ekkora mozgási energiája maradt az n-ik ütközés után. Ezzel akkora h_n magasságra jut, amelyre az energia-megmaradás szerint:

$$mgh_n = (1-k)^n mgh_0.$$

Innen

$$h_n = (1-k)^n h_0.$$

Ez n = 5-re:

$$h_5 = (1-k)^5 h_0 = 0{,}8^5 \cdot 1{,}8\ \text{m} = 0{,}589824\ \text{m} \approx \mathbf{0{,}59\ m}.$$

b) A hatodik ütközés előtt akkora sebességgel érkezik a talajra a golyó, amekkorával az ötödik után elhagyta a talajt, vagyis:

$$v_n = \sqrt{2gh_n} = \sqrt{2\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}59\ \text{m}} = \mathbf{3{,}44\frac{m}{s}}.$$

Sz2. Egy tömegpont mozgása két szakaszra bontható. Az első szakaszhoz tartozó átlagsebessége v_1, a másodikhoz v_2. A teljes útra vonatkozó átlagos sebesség v_1 és v_2 mértani közepe, $\bar{v} = \sqrt{v_1 \cdot v_2}$.

Adjuk meg a két egyenletes mozgáshoz tartozó utak arányát!

(Simon Péter)

Megoldás. Használjuk fel a feltételt és az átlagos sebesség fogalmát!

$$\sqrt{v_1 \cdot v_2} = \bar{v}$$

$$\frac{s_1}{t_1}\cdot\frac{s_2}{t_2} = \frac{(s_1+s_2)^2}{(t_1+t_2)^2}$$

$$\frac{s_1\cdot s_2}{t_1\cdot t_2} = \frac{s_1^2+2s_1s_2+s_2^2}{t_1^2+2t_1t_2+t_2^2}$$

$$s_1s_2t_1^2 + 2s_1s_2t_1t_2 + s_1s_2t_2^2 = s_1^2t_1t_2 + t_1t_2 2s_1s_2 + s_2^2t_1t_2$$

Osszuk mindkét oldalt $t_1 \cdot t_2$-vel:

$$s_1 \frac{s_2}{t_2} t_1 + \frac{s_1}{t_1} s_2 t_2 = s_1^2 + s_2^2$$

$$s_1 v_2 t_1 + s_2 v_1 t_2 = s_1^2 + s_2^2$$

Vezessük be az $x = \frac{v_2}{v_1}$ jelölést!

$$s_1 x v_1 t_1 + s_2 \frac{v_2}{x} t_2 = s_1^2 + s_2^2$$

$$s_1^2 x + \frac{s_2^2}{x} = s_1^2 + s_2^2$$

$$s_1^2 \cdot (x-1) = s_2^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 = \frac{1-\frac{1}{x}}{x-1} = \frac{1}{x} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}\,.$$

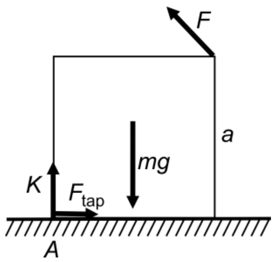
Sz3. Egy m = 2,7 kg tömegű, a = 1 dm oldalélű kocka a vízszintes asztallapon fekszik.

a) Legalább mekkora erő szükséges ahhoz, hogy a kockát az egyik éle körül meg tudjuk billenteni az egyik éle körül? A tapadási súrlódás elegendő nagy ahhoz, hogy a kocka az átbillentés közben ne csússzon meg.

b) Legalább mekkora a tapadási súrlódási együttható?

(Simon Péter)

Megoldás.
Adatok: m = 2,7 kg, a = 1 dm.



*a)*Az igényelt erő akkor a legkisebb, ha a támadáspont legmesszebb van a forgástengelytől, és az erő iránya olyan hogy az erőkar is a legnagyobb legyen. Esetünkben ez akkor teljesül, ha a jobb felső élben hat az erő, és iránya merőleges az A pontból az élig húzott egyenesre, vetületben a négyzet átlójára.
A kocka egyensúlyban van, ezért igaz rá, hogy

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0\,,\ \sum \mathbf{M} = 0\,.$$

Az ábra alapján a kocka A pontjára vonatkoztatva írjuk fel a forgatónyomatékokra vonatkozó feltételt: az F erő A pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka és az mg nehézségi erő forgatónyomatéka azonos nagyságú:

$$F \cdot \sqrt{2}a = mg \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow F = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot mg \approx 9{,}55\ \text{N}\,.$$

b) Alkalmazzuk dinamika alapegyenletét először y irányban:

$$K = mg - \frac{\sqrt{2}}{2} F = mg - \frac{mg}{4} = \frac{3}{4} mg\,.$$

Most alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét x irányban:

$$F_{tap.\max.} \ge F_{tap} = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$
$$\mu_0 \cdot K \ge \frac{\sqrt{2}}{2}F$$
$$\mu_0 \cdot \frac{3}{4}mg \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot mg$$
$$\mu_0 \ge \frac{1}{3}$$

Sz4 Vékony, l = 40 cm hosszú, elhanyagolható tömegű pálca végeihez 1 N súlyú, kisméretű A és B testeket erősítünk. Az így kapott, súlyzó alakú rendszert vízszintes talajra téve az ábra szerinti függőleges helyzetbe hozzuk. Egy harmadik, ugyanolyan C testet a talajon indítva nekilökünk az A testnek. Az ütközéskor a súlyzórendszer egyensúlyban és nyugalomban van. Az ütközés pillanatszerű és teljesen rugalmas, a súrlódás szerepe elhanyagolható, g = 10 m/s^2.

a) Mekkora sebességgel indítsuk a C testet, ha azt akarjuk, hogy a súlyzó alakú rendszer felemelkedjen a talajról?

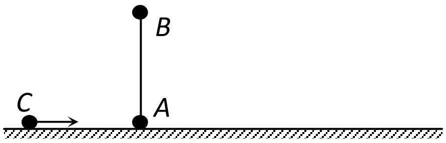
b) Mekkora a C test kezdősebessége, ha a pálca végein lévő testek egyszerre érnek talajt?

Ez utóbbi esetben:

c) Mekkora a pálcában ébredő erő a repülés közben?

d) Milyen messze lesz egymástól a talajra érkezés pillanatában a B és a C test?

a) Mekkora sebességgel csapódik a talajnak az A és a B test?



(Szkladányi András)

Megoldás. *a)* Jelölje v_1 a C test kezdősebességét. Az ütközést követően a C test megáll, az A test pedig v_1 sebességgel indul meg. A súlyzórendszer tömegközéppontjának kezdősebessége:

$$v_{t1} = \frac{mv_1}{2m} = \frac{v_1}{2}$$

Az A test (és a B is) a tömegközéppont körüli forgómozgásba kezd, amelynek kerületi sebessége $v_{k1} = v_1 - v_{t1} = {}^{v_1}/_2$, szögsebessége pedig:

$$\omega_1 = \frac{v_{k1}}{r} = \frac{{}^{v_1}/_2}{{}^{l}/_2} = \frac{v_1}{l}$$

Az A test akkor emelkedik fel a talajról, ha centripetális gyorsulása nagyobb a nehézségi gyorsulásnál:

$$a_{cp} = \omega_1^2 \cdot {}^{l}/_2 = \frac{v_1^2}{2l} > g$$

Az ehhez szükséges v_1 sebesség:

$v_1 > \sqrt{2gl} = \underline{2\sqrt{2}\,\frac{\mathrm{m}}{s}}$

b) Jelölje v_2 a C test kezdősebességét. Ha az A és a B test egyszerre ér talajt, akkor velük együtt érkezik a talajra a rendszer tömegközéppontja is. A súlyzórendszer ezt megelőzően szabadon esve és közben egyenletesen forogva mozgott a levegőben.

A tömegközéppont szabadesésének ideje $t = \sqrt{{}^{l}/_g}$.

Eközben a pálca negyed fordulatot tett meg a levegőben $\omega_2 = \frac{v_2}{l}$ szögsebességgel, ezért

$$\omega_2 t = \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; \frac{v_2}{l}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; v_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{gl} = \underline{\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

c) Repülés közben a tömegközéppont szabadon esik, ezért a pálcában ébredő erő egyenlő a testek körpályán tartásához szükséges erővel:

$$K = ma_{cp} = m\omega_2^2 \cdot {}^{l}/_{2} = m\frac{v_2^2}{2l} = mg\frac{\pi^2}{8} = \underline{\frac{\pi^2}{8}\,\mathrm{N}}$$

d) A talajra érkezés pillanatáig a tömegközéppont vízszintes irányú elmozdulása: $x = v_{t2}\cdot t = \frac{v_2}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{gl}\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{4}l = \frac{\pi}{10}\mathrm{m}$

A becsapódáskor a *B* és a *C* test távolsága: $d = x - {}^{l}/_{2} \approx \underline{11{,}4\ \mathrm{cm}}$

e) A talajra érkezéskor az *A* test sebességének vízszintes komponense egyenlő a tömegközéppont kezdősebességével:

$$v_{Ax} = v_{t2} = \frac{v_2}{2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A függőleges összetevő a tömegközéppont szabadeséséből származó, függőlegesen lefelé mutató sebességkomponens és a forgómozgásból eredő, függőlegesen felfelé mutató kerületi sebesség vektori összege:

$$v_{Ay} = gt - \omega_2\frac{l}{2} = \sqrt{gl} - \frac{v_2}{2} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Az *A* test sebességének nagysága:

$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} \approx \underline{1{,}63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$

Hasonlóképpen kapható a *B* test sebessége:

$$v_{Bx} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_{By} = gt + \omega_2\frac{l}{2} = \sqrt{gl} + \frac{v_2}{2} = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} \approx \underline{3{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}.$$