Gimnázium 9. évfolyam

1. Egy lejtő tetejéről vízszintes irányban, a lejtő alapjával párhuzamosan indítunk egy testet v_0 = 5 m/s sebességgel. A lejtő aljára a test $\sqrt{2}v_0$ sebességgel érkezik. Milyen hosszú a lejtő?

(Dudics Pál, Debrecen)

Megoldás

Adatok: v_0 = 5 m/s, $v = \sqrt{2}v_0$.

A lejtő aljára érkező test sebessége: $v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} \Rightarrow v_y = v_0$.

Az esés ideje: $t = \dfrac{v_0}{g}$.

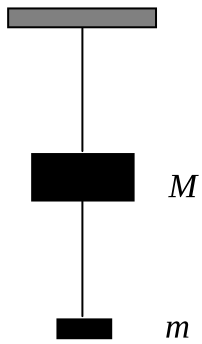
A lejtő magassága: $h = \dfrac{g}{2}t^2 = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

A lejtő alapja: $x = v_0 \cdot t = \dfrac{v_0^2}{g}$.

A lejtő hossza: $l = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} \cdot \dfrac{v_0^2}{g} \approx 2{,}8\ \text{m}$.

2. Az ábrán látható tömegek M és m. A testek ideálisnak tekinthető gumiszálakkal kötődnek a mennyezethez és egymáshoz.

- *a)* Mekkora a testek gyorsulása az alsó gumiszál elvágásának pillanatában?
- *b)* Mekkora a testek gyorsulása a felső gumiszál elvágásának pillanatában?
- *c)* Mekkora a testek relatív gyorsulása a két esetben?



(Szkladányi András, Baja)

Megoldás:

A gumiszál elvágása előtt mindkét test egyensúlyban van: $\sum F = 0$,

$$M:\ K_1 = Mg + K_2 , \qquad m:\ K_2 = mg .$$

a) Az alsó gumiszál elvágásával K_2 erő megszűnik.

A M tömegű test gyorsulása: $A = \dfrac{K_1 - Mg}{M} = \dfrac{m}{M} g$ (felfelé).

A m tömegű test gyorsulása: $a = g$ (lefelé).

*b)*A felső gumiszál elvágásával K_1 erő megszűnik.

A M tömegű test gyorsulása: $A = \dfrac{K_2 + Mg}{M} = \dfrac{M + m}{M} g$ (lefelé).

A m tömegű test gyorsulása: $a = 0$.

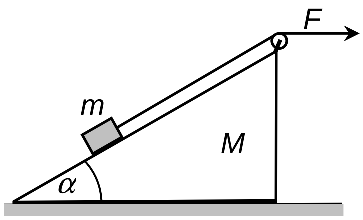
c)

A testek relatív gyorsulása a két esetben: *a)* $\Delta a = \frac{M+m}{M} g$; *b)* $\Delta a = \frac{M+m}{M} g$.

3. Az ábrán látható M = 3m tömegű, $\alpha = 30^\circ$ hajlásszögű, lejtő alakú hasáb súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes felületen. A m = 1 kg tömegű testet a hasábhoz rögzített csigán átvetett fonál segítségével, F erővel húzzuk vízszintes irányba. A m tömegű test és hasáb között a súrlódás szintén elhanyagolható.

a) Mekkora legyen az F értéke, hogy a két test együtt mozogjon, azaz a m tömegű test ne csússzon a hasábon?

b) Milyen gyorsulással mozog a rendszer?



(Kotek László, Pécs)

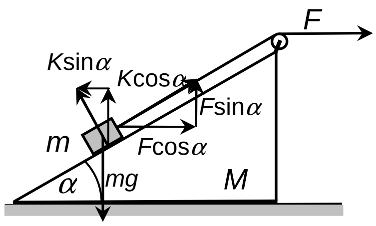
Megoldás:

a) A feltétel szerint a testek együtt mozognak, legyen a gyorsulásuk *a*! A dinamika alaptörvényéből:

$$(m+M)a = F,$$

$$a = \frac{F}{m+M} = \frac{F}{4m}. \qquad (1)$$

Bontsuk fel a m tömegű testre ható erőket vízszintes és függőleges komponensekre! Vízszintes irányban a test a gyorsulással mozog, függőleges irányban pedig az erők eredője zérus.



$$ma = F\cos\alpha - K\sin\alpha, \qquad (2)$$

$$mg - K\cos\alpha - F\sin\alpha = 0. \qquad (3)$$

(3)-ból:

$$K = \frac{mg - F\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (4)$$

(1)-et és (4)-et (2)-be beírva:

$$m\cdot\frac{F}{4m} = F\cos\alpha - \frac{mg - F\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha,$$

$$\frac{F}{4}\cos\alpha = F\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - mg\sin\alpha,$$

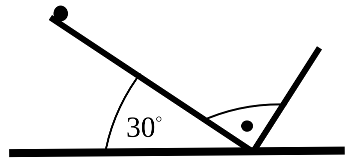
$$F = \frac{mg\sin\alpha}{1 - \frac{\cos\alpha}{4}},$$

$$\boxed{F = \frac{4mg}{8-\sqrt{3}} = 6{,}38\ \mathrm{N}.}$$

b) A keresett gyorsulás:

$$\boxed{a = \frac{F}{4m} = \frac{g}{8-\sqrt{3}} \approx 1{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$$

4. A rajznak megfelelően, függőleges síkban rögzítünk két, egyenes szakaszból álló, derékszögben törésmentesen meghajló „meglehetősen síkos” lejtőt. A pálya görbült szakasza elhanyagolható méretű. A hosszabb szakasz 1 méter hosszú, a rövidebb feleekkora. A hosszabb lejtő 30°-ot zár be a vízszintessel.



a) A hosszabb lejtő tetején elengedett kisméretű hasáb éppen eljut a kisebb lejtő tetejéig. Mekkora a hasáb és a lejtő között a csúszási súrlódási együttható?
b) Legalább mekkora sebességgel indítsuk a hasábot a kisebb lejtő tetejéről, hogy eljusson a hosszabb lejtő végéig?

(Simon Péter, Pécs)

Megoldás:

Adatok: a hosszabb pálya 2*a* = 1 m, a rövidebb pálya *a* = 0,5 m, $\alpha = 30^\circ$.

a)
Alkalmazzuk a munkatételt arra a folyamatra, amikor a golyó a hosszabb lejtő tetejéről eljut a kisebb lejtő tetejéig:

$$\sum W = \Delta E_{\text{mozg.}}.$$

A testre három erő hat: a nehézségi erő, a súrlódási erő, a lejtő által a golyóra kifejtett kényszererő. Ez utóbbi nem végez munkát a golyón, hisz ez az erő merőleges a golyó elmozdulására. A folyamat egészét tekintve a golyó mozgási energiájának megváltozása nulla.

$$W_{\text{neh}} + W_{\text{g}} = 0.$$

A nehézségi erő munkája: $W_{\text{neh}} = mgh_1 - mgh_2 = mg \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \right)$.

Itt felhasználtuk, hogy egy 30°-os derékszögű háromszög rövidebb befogója az átfogó 1/2-szerese, a hosszabb befogója a $\sqrt{3}/2$-szerese.
A golyó és a lejtő között fellépő nyomóerő a hosszabb lejtőn $\left(\sqrt{3}/2\right) \cdot mg$,
a kisebb lejtőn $0{,}5 \cdot mg$.
Így a súrlódási erő munkája a teljes pályán:

$$W_{\text{s}} = -\mu \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} mg \cdot 2a - \mu \cdot \frac{1}{2} mg \cdot a = -\mu \cdot mga \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right).$$

A fentieket beírva a munkatételbe

$$mg \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \right) - \mu\, mga \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Az egyszerűsítések és rendezés után adódik:

$$\mu = \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1} = 0{,}06.$$

b)
Ismét alkalmazzuk a folyamatra a munkatételt:

$$\sum W = \Delta E_{\text{mozg.}}$$

A golyóra ismét három erő hat: a nehézségi erő és a súrlódási erő végez munkát, a lejtő által a golyóra kifejtett kényszererő nem.

$$W_{\text{neh}} + W_{\text{s}} = \Delta E_{\text{mozg.}}$$

A nehézségi erő munkája most az *a)* megoldásrészben leírtnak az ellentettje:

$$W_{\text{neh}} = mgh_2 - mgh_1 = -mg \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \right).$$

Az *a)* megoldásrészben leírtak szerint súrlódási erő munkája a teljes pályán ismét:

$$W_s = -\mu mga \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right).$$

A fentieket beírva a munkatételbe:

$$-mg \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\right) - \mu mga \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} m v^2.$$

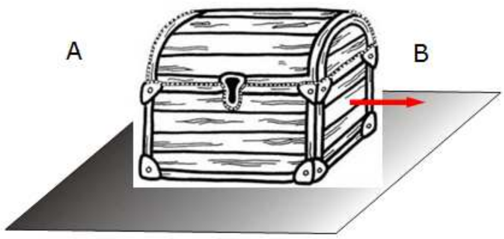
Az egyszerűsítések és rendezés után adódik:

$$v = \sqrt{\left(4 - 2\sqrt{3}\right) ga} \approx 1{,}64\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Gimnázium 10. évfolyam

1. Ugyanaz, mint a gimnázium 9. évfolyam 3. feladata.

2. Angéla és Bogi kirándulás során kincsesládára bukkan. Angéla a láda egyik végénél fogva, Bogi a másik végénél fogva próbálja a ládát elhúzni. A tapadási súrlódási együttható a láda és a vízszintes talaj közt az Angéla – Bogi egyenes mentén csökken. Melyiküknek könnyebb a ládát megmozdítani, ha a láda tömegközéppontján átmenő, a láda oldallapjára merőleges erővel próbálkoznak? Válaszunkat fizikai érvekkel támasszuk alá! Tételezzük fel, hogy a láda tömegeloszlása egyenletes, valamint, hogy alaplapja egyenletesen fekszik fel a vízszintes felületre!



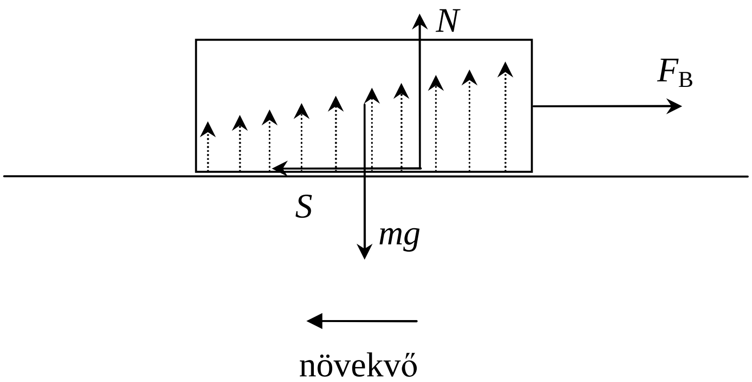
(Pálfalvi László, Pécs)

Megoldás:

Keressük a megcsúszáshoz szükséges minimális erőt mindkét esetben. Megcsúszáskor a merev testre vonatkozó egyensúlyi feltételek, miszerint
i) a ható erők eredője zérus, illetve
ii) bármely nyugvó pontra vonatkozó forgatónyomatékok eredője zérus
teljesülnek.

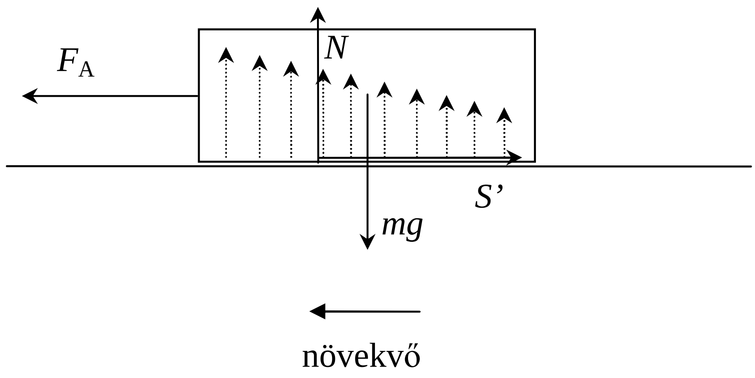
Ha Bogi húz:

Az érintkezési sík elemi felületein a felületre merőleges elemi kényszererők lépnek fel. Ezek eredőjének nagysága *mg* kell, hogy legyen az i) feltétel miatt. Az ábra vázlatosan mutatja (nem léptékhelyesen!!) az elemi erőket, illetve azok eredőjét (N). Ha pl. az érintkező felület középpontján a rajzra merőlegesen felvett tengelyre vonatkozó forgatónyomatékot vizsgáljuk (csak N-nek, és F_B-nek van), akkor a ii) feltétel teljesülésének érdekében evidens, hogy N hatásvonala Bogi felé kell essen. Az elemi súrlódási erők a húzóerővel ellentétesek, nagyságuk az adott helyen érvényes súrlódási tényező és az ott aktuális nyomóerő szorzata. Az eredő S erő – amivel egyenlő kell legyen F_B – ezen elemi erők eredője lesz.



Ha Angéla húz:

A ii) feltétel teljesülésének érdekében hasonló megfontolások alapján evidens, hogy N hatásvonala ez esetben Angéla felé kell essen. Hasonlóan az elemi súrlódási erők a húzóerővel ellentétesek, nagyságuk az adott helyen érvényes súrlódási tényező és az ott aktuális nyomóerő szorzata. Az eredő S' erő – amivel egyenlő kell legyen F_A – ezek eredője lesz.



A fenti eseteket összehasonlítva, Bogi húzása esetén a nagyobb elemi nyomóerőkhöz kisebb súrlódási együttható tartozik, azaz az eredő súrlódási erő kisebb lesz, mint Angéla húzása esetén. S < S' miatt $F_B < F_A$, azaz **Boginak könnyebb** elhúzni a ládát.

3. Hélium- és nitrogéngáz keverékével állandó nyomáson Q = 8000 J hőt közlünk. A gázkeverék eközben W = 3000 J munkát végez. Mekkora a két összetevő százalékos aránya? Adjuk meg a százalékarányt tömegre és részecskeszámra egyaránt!

(Holics László, Budapest)

Megoldás:

Az ideális gázokra izobár állapotváltozásnál érvényes: $W_{\text{gáz}} = p\Delta V$.

A belső energia megváltozása pedig: $\Delta E = \frac{f}{2} p\Delta V$.

E kettőből következik: $W_{\text{gáz}} = \frac{2}{f}\Delta E$.

Az egy részecske szabadsági fokainak száma innen (felhasználva az I. főtételt):

$$f = \frac{2\Delta E}{W_{\text{gáz}}} = \frac{2\left(Q - W_{\text{gáz}}\right)}{W_{\text{gáz}}} .$$

Keverékben ez az egy részecske *átlagos* szabadsági fokszáma (ún. halmazátlag):

$$\bar{f} = \frac{f_1 N_1 + f_2 N_2}{N_1 + N_2} .$$

Ezt az előző egyenletbe írva:

$$\frac{f_1 N_1 + f_2 N_2}{N_1 + N_2} = \frac{2\left(Q - W_{\text{gáz}}\right)}{W_{\text{gáz}}} .$$

A részecskeszámarányt x-szel jelölve ($x = \frac{N_1}{N_2}$):

$$\frac{f_1 x + f_2}{x + 1} = \frac{2\left(Q - W_{\text{gáz}}\right)}{W_{\text{gáz}}} .$$

Innen a keresett *részecskeszámarány:*

$$x = \frac{2\left(Q - W_{\text{gáz}}\right) - f_2 W_{\text{gáz}}}{f_1 W_{\text{gáz}} - 2\left(Q - W_{\text{gáz}}\right)} = 5 .$$

Így tehát $N_1 = 5N_2$ (azaz 5 szabadsági fokú nitrogénből 5-ször kevesebb van, mint a 3 szabadsági fokú héliumból). A *százalékos* arányok:

$$\frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{x}{x+1} = 83\% \text{ és } \frac{N_2}{N_1 + N_2} = \frac{1}{x+1} = 16{,}67\% .$$

A *tömegarány* pedig:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{N_1 m_{01}}{N_2 m_{02}} = \frac{N_1 M_1}{N_2 M_2} = x\,\frac{M_1}{M_2} = 5 \cdot \frac{4}{28} = \frac{5}{7}\,,$$

azaz $m_1 = 0{,}714\ m_2$.

A *százalékos* tömegarány pedig:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{xM_1}{xM_1 + M_2} = \frac{5}{12} = 41{,}7\% \text{ és } \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{M_2}{xM_1 + M_2} = \frac{7}{12} = 58{,}3\%\,.$$

Megjegyzés:
A paraméteres megoldásnál sokkal egyszerűbb, ha azonnal beírjuk az ismert számadatokat (tehát, csak a fizikát kell tudni hozzá):

$$f - \frac{2\Delta E}{W_{\text{gáz}}} = \frac{2\left(Q - W_{\text{gáz}}\right)}{W_{\text{gáz}}} = \frac{10}{3}\,, \tag{1}$$

másrészt

$$f = \frac{f_1 N_1 + f_2 N_2}{N_1 + N_2} = \frac{3N_1 + 5N_2}{N_1 + N_2}\,. \tag{2}$$

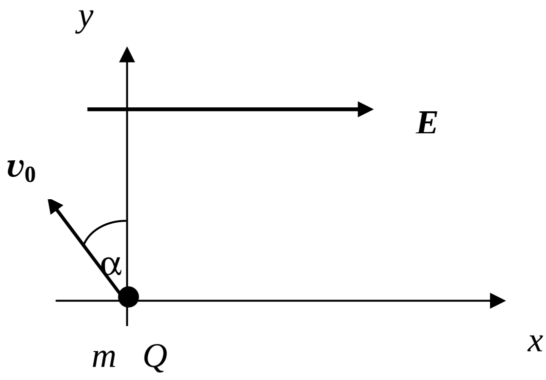
Ezzel (1) és (2)-ből:

$$\frac{3x + 5}{x + 1} = \frac{10}{3}\,.$$

Ahonnan: $9x + 15 = 10x + 10$, tehát x = 5.
Innen tovább ugyanúgy.

4. Az ábrán látható koordináta-rendszer origójából v_0 = 2 m/s sebességgel indítunk el egy m tömegű, $Q = mg/E$ pozitív töltésű pontszerű testet úgy, hogy a kezdősebesség a függőleges y tengellyel $\alpha = 30^\circ$-os szöget zár be. A teret egy homogén, az x tengellyel párhuzamos, pozitív irányba mutató, E térerősségű elektromos mező tölti ki.

a) Mekkora a pálya legmagasabban fekvő pontjának az x és y koordinátája, és mikor ér ebbe a pontba a test?
b) Melyik időpillanatban lesz a test sebessége minimális?
c) Az xy koordináta-rendszerben vázold a mozgás pályaalakját! Számítás és indoklás nem szükséges!



(Koncz Károly, Pécs)

Megoldás:

Adatok: v_0 = 2 m/s, $\alpha = 30^\circ$, $Q = mg/E$.

a)
A tömegpont akkor éri el a pálya legmagasabban lévő pontját, amikor a sebességének függőleges irányú komponense nulla: $v_y = v_0 \cos\alpha - g\,\Delta t$,

$$0 = v_0 \cos\alpha - g\,\Delta t \;\Rightarrow\; \Delta t_{\text{m}} = \frac{v_0 \cos\alpha}{g} = 0{,}17\ \text{s}\,.$$

A pálya legmagasabban lévő pontjának koordinátái:

$$y = v_0 \cos\alpha\,\Delta t - \frac{g}{2}\Delta t^2\,, \qquad x = -v_0 \sin\alpha\Delta t + \frac{EQ}{2m}\Delta t^2\,,$$

$$y_m = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} = 0{,}15\ \text{m},$$

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left(-\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{2}\right) = -0{,}023\ \text{m}.$$

b)

A tömegpont sebessége akkor minimális, ha a pillanatnyi sebessége merőleges az eredő erőre. Az eredő erő *EQ* = *mg* miatt, -45°-ot zár be az x tengellyel. Ezért a tömegpont sebessége $+45^\circ$-ot zár be az y tengellyel, a két sebességkomponens egyenlő egymással:

$$v_y' = v_x',$$

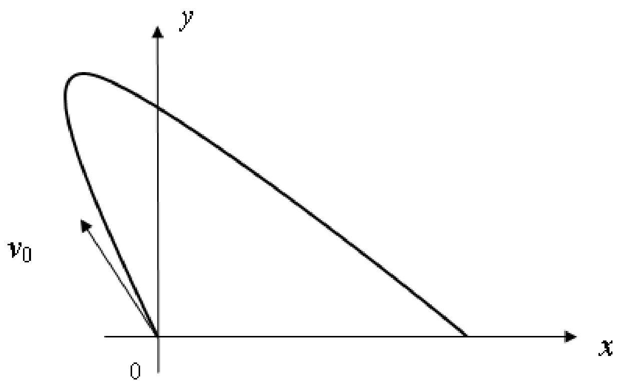
$$(v_0\cos\alpha - g\Delta t)\cos 45^\circ = \left(-v_0\sin\alpha + \frac{EQ}{m}\Delta t\right)\cos 45^\circ.$$

Használjuk fel, hogy *EQ/m=g:*

$$v_0\cos\alpha - g\Delta t = -v_0\sin\alpha + g\Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{v_0(\cos\alpha + \sin\alpha)}{2g} = 0{,}14\ \text{s}.$$

c)



Szakközépiskola 9. évfolyam

1. Egy személyautó sofőrje megmérte autója minimális fékútját 90 km/h sebességnél, és 31,25 m-nek találta.

a) Mekkora az autó gyorsulása fékezés közben?

b) A személyautó vezetőjének reakcióideje 0,8 s. Ezt is figyelembe véve, mekkora a féktávolság?

(Csányi Sándor, Szeged)

Megoldás:

Adatok: υ_0 = 90 km/h, s = 31,25 m.

a)

Az autó gyorsulásának nagysága fékezés közben: $a = \frac{\upsilon_0^2}{2s} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Az autó lassul, így a gyorsulása előjeles skalármennyiségként: $a = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b)

A személyautó vezetőjének reakcióidejét is figyelembe véve, a féktávolság:

$$s' = s + \upsilon_0 t' = 51{,}25\ \text{m}\,.$$

2. Vízszintes felületen lévő, két különböző tömegű testet fonállal kötöttünk össze. Erre a rendszerre állandó nagyságú húzóerőket fejtettünk ki a vízszintes fonál irányában, egyik alkalommal balra, másik esetben jobbra húzva a testeket. A két esetben a fonálban ébredő erők aránya 3:2. Ha 10 N nagyságú erővel húztuk a rendszert, akkor állandósult állapotban egyenes vonalú egyenletes mozgást végezve mozgott. 20 N erő alkalmazása esetén a gyorsulása 2 m/s^2 értékű volt. (A két test súrlódó felülete azonos minőségű.)

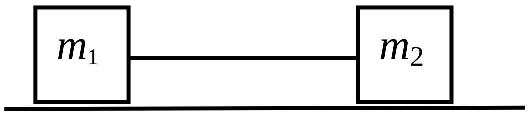
a) Mekkora a csúszási súrlódási együttható értéke?

b) Mekkora a testek tömege?

(Suhajda János, Kiskőrös)

Megoldás

Adatok: a = 2 m/s^2, F_1 = 10 N, F_2 = 20 N, K_2:K_1 = 3:2.



Először húzzuk a testeket balra, ekkor a testek egyenletesen mozognak. Alkalmazzuk a két test együttesére a dinamika alapegyenletét:

$$F_1 - (F_{s1} + F_{s2}) = 0\,. \qquad (1)$$

Most húzzuk a testeket jobbra, ekkor a testek gyorsulnak. Alkalmazzuk a két test együttesére a dinamika alapegyenletét:

$$F_2 - (F_{s1} + F_{s2}) = (m_1 + m_2)a\,.$$

A két fenti egyenletet felhasználva adódik:

$$F_2 - F_1 = (m_1 + m_2)a \Rightarrow m_1 + m_2 = \frac{F_2 - F_1}{a} = 5\ \text{kg}\,.$$

a)

Az (1) egyenletet felhasználva: $F_1 - \mu(m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow \mu = \frac{F_1}{(m_1 + m_2)g} = 0{,}2\,.$

b)

Alkalmazzuk az m_2 tömegű testre a dinamika alapegyenletét, amikor azt balra húzzuk:

$$K_1 - F_{s2} = 0 \Rightarrow K_1 = F_{s2}\,.$$

Alkalmazzuk az m_1 tömegű testre a dinamika alapegyenletét, amikor azt jobbra húzzuk:

$$K_2 - F_{s1} = m_1 a \Rightarrow K_2 = F_{s1} + m_1 a\,.$$

Írjuk fel a két fonálerő arányát: $\frac{K_1}{K_2} = \frac{F_{s2}}{F_{s1} + m_1 a}\,,$

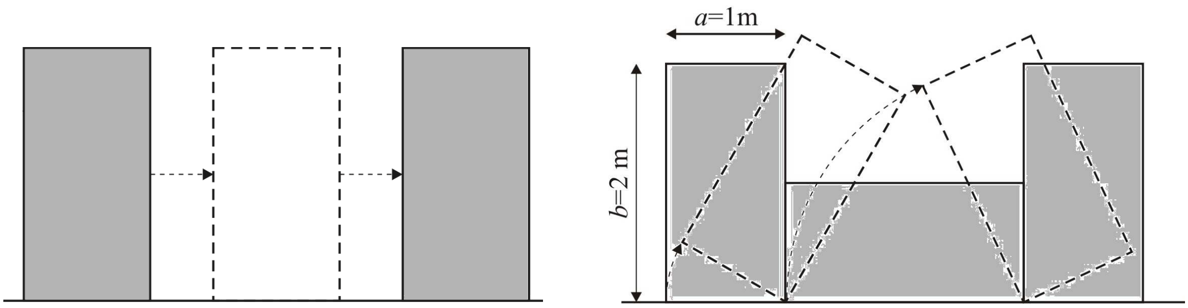
$$\frac{2}{3} = \frac{\mu m_2 g}{\mu m_1 g + m_1 a} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu g + a}{\mu g} = \frac{4}{3}\,.$$

Az $m_1 + m_2 = 5\ kg$ és $m_2 / m_1 = 4/3$ egyenleteket figyelembe véve, adódik a két test tömege:

$$m_1 = 15/7 \text{ kg}, m_2 = 20/7 \text{ kg}.$$

3. Ugyanaz, mint a gimnázium 9. évfolyam 3. feladata.

4. Egy 1 m oldalhosszú és 2 m magas négyzetalapú, homogén tömegeloszlású hasábot mozgatunk az ábrán jelölt kétféle módon ugyanabba a helyzetbe. Egyrészt egyenletesen csúsztathatjuk a talajon, másrészt átbillenthetjük a sarkain keresztülmenő forgástengelyeken át forgatva. Mekkora a talaj és a hasáb közötti csúszási súrlódási együttható, ha a két módon egyenlő munkát végzünk?



(Csányi Sándor, Szeged)

Megoldás:

Az első esetben a testet 3 m-rel mozdítjuk el a súrlódási erővel egyenlő tolóerővel hatva. Így a munkavégzés:

$$W_1 = \mu mgs\,.$$

A második esetben két emelési munkát végzünk, a test akkor billen át, ha a tömegközéppontja eléri a forgástengelytől elindított függőleges egyenest. Az emeléseknél a tömegközéppontokat emeljük fel.

$$W_2 = mg\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{b}{2}\right) + mg\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{a}{2}\right) = mg\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) + mg\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) = mg\left(\sqrt{5} - \frac{3}{2}\right)$$

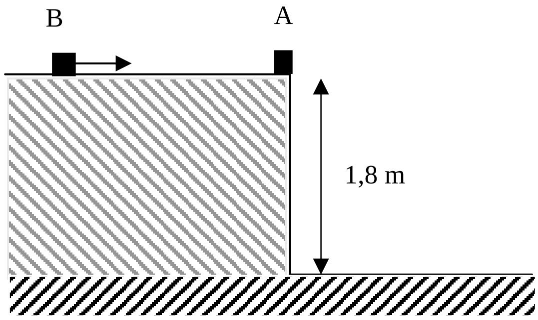
A feladat szövege szerint a két munka egyenlő:

$$\mu mg \cdot (3 \text{ m}) = mg \cdot \left[\left(\sqrt{5} - \frac{3}{2}\right) \text{m}\right].$$

$$\mu = \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{2} \approx 0{,}245\,.$$

Szakközépiskola 10. évfolyam

1. Egy vízszintes felületű magaslat 180 cm-rel emelkedik a talaj fölé, szélén egy 0,8 kg tömegű A test áll. Tőle 2,52 m távolságból a felületen nekilökünk egy 0,5 kg tömegű B testet, mely tökéletesen rugalmatlanul ütközik A-val. A magaslat lábától 0,9 m távolságban érnek talajt. A B test az ütközés előtt annyi ideig mozgott, mint ütközés után. Mekkora a súrlódási együttható a felület és a B test között? (A testek mérete elhanyagolható.)



(Kirsch Éva, Debrecen)

Megoldás:

Az összetapadt A és B test az ütközés után vízszintes hajítással mozog. Függőlegesen megtett útja $h = gt^2/2$, tehát h = 1,8 m magasságból t = 0,6 s alatt esik le. Ezalatt vízszintesen x = 0,9 m-t halad, tehát vízszintes sebessége v_{AB} = 1,5 m/s.
Az ütközésre teljesül a lendület-megmaradás törvénye:

$$m_B \cdot v_B = (m_B + m_A) v_{AB}. \qquad (1)$$

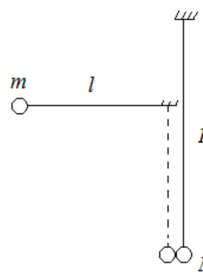
Ebből v_B = 3,9 m/s.
A B test indulásától az ütközésig t = 0,6 s telik el, és közben egyenletesen csökken a sebessége a súrlódás miatt. A megtett útja s_B = 2,52 m.

Átlagsebessége: $\frac{s_B}{t} =$ 4,2 m/s, tehát induláskor 4,5 m/s volt a sebessége.

A lassulás $a = \Delta v/t$ = -1 m/s^2, és ugyanakkor $a = -F_s/m_B = -\mu m_B g/m_B = -\mu g$.
Tehát a súrlódási együttható $\mu = a/g = 0{,}1$.

2. Két, l = 64 cm és L = 96 cm hosszúságú síkinga ütközését tanulmányozzuk. Az ingák tömegei közti összefüggés: $M = 3m$, és kezdeti helyzetük a rajzon látható. Kezdetben mindkettő nyugalomban van.

a) Számítsuk ki, hogy az ütközés után mekkora sebességgel mozognak a testek, ha az ütközés tökéletesen rugalmatlan!
b) Mekkora magasságra emelkednek az összetapadt testek?
c) Az előző helyen a rövidebb fonál mekkora szöget zár be a függőlegessel?



(Ábrám László, Budapest)

Megoldás:

Adatok: l = 64 cm, L = 96 cm , $M = 3m$.

a)
Az m tömegű test ütközés előtti sebességét az energia-megmaradás törvény segítségével kaphatjuk meg:

$$m \cdot g \cdot l = \frac{m \cdot v_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot l} \quad \Rightarrow \quad v_1\text{=3,58 m/s.}$$

A testek rugalmatlan ütközése utáni közös sebességét a lendület-megmaradás törvényével határozhatjuk meg:

$$m \cdot v_1 = (m+M) \cdot v \;;\; v = \frac{m}{m+M} \cdot v_1 = \frac{v_1}{4} = 0{,}895 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b)
Az emelkedés magasságát szintén az energia-megmaradás törvény segítségével kaphatjuk meg:

$$\frac{(m+M) \cdot v^2}{2} = (m+M) \cdot g \cdot x,$$

$$x = \frac{v^2}{2g} = \frac{l}{16} = 0{,}04 \ \mathrm{m}.$$

c)

$$\cos\alpha = \frac{l-x}{l} = \frac{15}{16} \Rightarrow \alpha = 20{,}36^\circ$$

3. Egy mozgatható dugattyúval ellátott henger kezdetben p_1, V_1, T_1 állapotjelzőkkel bíró oxigéngázt tartalmaz. A gázhoz kívülről ismert Q hőt vezetünk izochor állapotváltozással, majd izotermikusan engedjük tágulni, míg nyomása ismét a kezdeti értékre áll be. Mekkora lesz az új térfogat?
Adatok: $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa, $V_1 = 5$ l, $T_1 = 40\ ^\circ\mathrm{C}$, $Q = 300$ J, $c_V = 653$ J/kgK.

(Wiedemann László, Budapest)

Megoldás:

Az izochor módon felvett hő teljes egészében az oxigéngáz belső energiáját növeli:

$$Q = \Delta E_\mathrm{b} = \frac{5}{2} nR\Delta T = \frac{5}{2}\frac{p_1V_1}{T_1}\Delta T.$$

Ebből a hőmérsékletváltozás számolható:

$$\Delta T = \frac{2QT_1}{5p_1V_1} = 37{,}6 \ \mathrm{K}.$$

A gáz új hőmérséklete: $T_2 = T_1 + \Delta T = 313\ \mathrm{K} + 37{,}6\ \mathrm{K} = 350{,}6\ \mathrm{K}$

És a gáz új nyomása Gay-Lussac II. törvénye szerint: $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1} \Rightarrow p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{350{,}6}{313} \cdot p_1$.

Az izotermikus állapotváltozásra alkalmazzuk a Boyle-Mariotte törvényt:

$$p_2V_1 = p_1V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{p_2}{p_1}V_1 = \frac{350{,}6}{313} \cdot 5\ \mathrm{l} = 5{,}6\ \mathrm{l}.$$

4. Függőleges helyzetű, alul csomóval lezárt szigetelő fonálra két 1 gramm tömegű, pozitív töltésű, apró szigetelő gyöngyöt fűzünk fel. Az egyensúly beállta után a gyöngyök távolsága 12 cm. Ezután felülről egy harmadik ugyanolyan, szintén pozitív töltésű gyöngyöt fűzünk a fonálra. Az új egyensúlyi helyzetben a két felső gyöngy távolsága 5 cm, az alsóké pedig 10 cm.

a) Határozd meg a kölcsönható töltések szorzatait!
b) Az előző eredményeket felhasználva határozd meg az alsó gyöngy elektromos töltését!

(Szkladányi András, Baja)

Megoldás:

Adatok: $m = 1$ g, $r_1 = 12$ cm, $r_2 = 10$ cm, $r_3 = 5$ cm.

Számozzuk a gyöngyöket alulról. Az alsó (1.) gyöngyöt a csomó tartja meg.
Az első esetben a felső (2.) gyöngy egyensúlya alapján:

$$m \cdot g = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_1^2} \Rightarrow Q_1 \cdot Q_2 = \frac{m \cdot g \cdot r_1^2}{k} = 1{,}6 \cdot 10^{-14} \ \text{C}^2 .$$

Amikor a harmadik gyöngyöt is felfűzzük, az egyensúly feltétele a középső (2.) gyöngyre:

$$m \cdot g = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_2^2} - k \cdot \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_3^2} .$$

Behelyettesítve a $Q_1 \cdot Q_2$ szorzatra kapott eredményt és kifejezve a $Q_2 \cdot Q_3$ szorzatot, a következőt kapjuk:

$$Q_2 \cdot Q_3 = \frac{m \cdot g \cdot r_3^2}{k} \cdot \left(\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right) = 1{,}22 \cdot 10^{-15} \ \text{C}^2 .$$

A felső (3.) gyöngy egyensúlya alapján pedig:

$$m \cdot g = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_3}{(r_2 + r_3)^2} + k \cdot \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_3^2} .$$

Most a $Q_2 \cdot Q_3$ szorzatra kapott eredményt helyettesítjük be, és kifejezzük a $Q_1 \cdot Q_3$ szorzatot:

$$Q_1 \cdot Q_3 = \frac{m \cdot g \cdot (r_2 + r_3)^2}{k} \cdot \left(2 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right) = 1{,}4 \cdot 10^{-14} \ \text{C}^2 .$$

b)

Tekintsük ezután a $Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_3}{Q_2 \cdot Q_3} = Q_1^2$ kifejezést. A baloldali szorzatok értékeit behelyettesítve:

$$Q_1 = 4{,}28 \cdot 10^{-7} \ \text{C} .$$