Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny
2009 / 2010

MEGOLDÓKULCS

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen az egyedi megoldások pontozását Önöktől várjuk.
A feladatok megoldásánál a *g* = 9,81 m/s² értéket használjuk. A megoldás *g* = 10 m/s² esetén is teljes értékűnek tekinthető.

1. feladat:

Adatok: v_1 = 60 km/h, v_2 = 8 km/h, v_3 = 4 km/h, s=17 km

1. megoldás:

a) A motorcsónak által megtett út: $s_1 = v_1 \cdot t$.

Az evezős által megtett út: $s_2 = v_2 \cdot t$. **2 pont**

Mivel egymással szemben haladnak $s = s_1 + s_2 = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$, **2 pont**

ahonnan az idő kifejezhető: $t = \dfrac{s}{v_1 + v_2} = \underline{0{,}25\ \text{h} = 15\,\text{min} = 900\ \text{s}}.$ **4 pont**

A horgásztól $s_2 = v_2 \cdot t = \underline{2\ \text{km}}$ távolságban találkoznak. **2 pont**

b) A parthoz viszonyított sebességek: $v_{1,b} = 56\dfrac{km}{h}$ $v_{2,b} = 12\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. **3 pont**

Behelyettesítve az a)-ban kapott képletekbe: $t_b = \underline{15\,\text{min}}$ és $s_b = \underline{3\ \text{km}}$. **2 pont**

c) A parthoz viszonyított sebességek: $v_{1,c} = 64\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ $v_{2,c} = 4\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. **3 pont**

Behelyettesítve az a)-ban kapott képletekbe: $t_c = \underline{15\,\text{min}}$ és $s_c = \underline{1\ \text{km}}$. **2 pont**

2. megoldás:

A motorcsónak és az evezős egymáshoz viszonyított sebessége mindhárom esetben:

$v = v_1 + v_2 = 60\dfrac{\text{km}}{\text{h}} + 8\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 68\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. **6 pont**

Így mindhárom esetben: $t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{1}{4}h = \underline{15\,\text{min}}$ múlva találkoznak. **4 pont**

a) A horgásztól $s_a = v_2 \cdot t = \underline{2\ \text{km}}$ távolságban találkoznak. **2 pont**

b) Az evezős sebessége a parthoz képest: $v_b = 8\dfrac{\text{km}}{\text{h}} + 4\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 12\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. **2 pont**

A horgásztól $s_b = v_b \cdot t = \underline{3\text{km}}$ távolságban találkoznak. **2 pont**

c) Az evezős sebessége a parthoz képest: $v_b = 8\dfrac{\text{km}}{\text{h}} - 4\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 4\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. **2 pont**

A horgásztól $s_c = v_c \cdot t = \underline{1\ \text{km}}$ távolságban találkoznak. **2 pont**

2. feladat:

Adatok: v_0 = 20 m/s, g = 9,81 m/s^2, h = 15 m

a) $v = v_0 - g \cdot t$, amikor a labda a legmagasabb pontban van v=0 teljesül, így az emelkedés ideje:

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = 2{,}04 \text{ s.}$$ **4 pont**

A jelenség szimmetrikus volta miatt, az emelkedéshez és az eséshez ugyanannyi idő kell. Így a levegőben töltött idő $t_2 = 2 \cdot t_1 = \underline{4{,}08 \text{ s}}$. **5 pont**

b) A négyzetes úttörvényt használva a test maximális magassága:

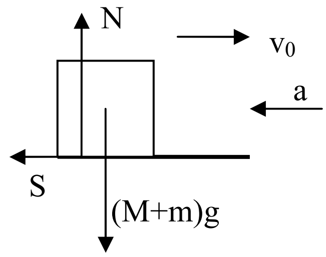
$$h_1 = v_0 t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{v_0^2}{2g} = \underline{20{,}4 \text{ m.}}$$ **5 pont**

c) Ismételten a négyzetes úttörvényt használjuk: $h = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$, t-re megoldva:

$$t = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - 2\frac{h}{g}} = 2{,}04 \text{ s} \pm 1{,}05 \text{ s},$$

tehát a test 15m magasan két időpontban, <u>0,99 s</u> és <u>3,09 s</u>-ban van. **3+3 pont**

3. feladat:



Adatok: v_1 = 300 m/s, m = 10 g = 0,01 kg, M = 1,5 kg, μ = 0,3

<u>1. megoldás:</u>

Az ütközést pillanatszerűnek tekintve teljesül a lendület-megmaradás törvénye:

$$m \cdot v_1 + 0 = (m + M) \cdot v_0,$$ **6 pont**

$$v_0 = \frac{m}{m+M} v_1 = 1{,}99 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$ **4 pont**

A hasábnak függőleges irányú gyorsulása nincs, így: $N = (m + M)g$. **2 pont**

Írjuk fel a dinamika alapegyenletét a vízszintes irányra: $(m + M)a = S$. **2 pont**

A gyorsulás (lassulás): $a = \frac{S}{m+M} = \frac{\mu N}{m+M} = \frac{\mu(m+M)g}{m+M} = \mu g = 2{,}94 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. **2 pont**

A hasáb sebessége: $v = v_0 - a \cdot t$ A hasáb akkor áll meg, amikor v = 0 teljesül. Azaz a hasáb

$$t = \frac{v_0}{a} = 0{,}676 \text{ s}$$ ideig mozog. **2 pont**

A négyzetes úttörvényt felírva: $s = v_0 t - \frac{a}{2} t^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \underline{67{,}3 \text{ cm.}}$ **2 pont**

<u>2. megoldás:</u>

A csúszás munkatétellel is kezelhető.

A hasábnak függőleges irányú gyorsulása nincs, így: $N = (m + M)g$. **2 pont**

A súrlódási erő: $S=\mu N=\mu(m+M)g$. **2 pont**

A munkatételt felírva:

$$0 - \frac{1}{2}(m + M)v_0^2 = -Ss = -\mu(m + M)gs,$$ **4 pont**

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \underline{67{,}3 \text{ cm.}}$$ **2 pont**

Megjegyzés: Ha elvileg rosszul számolja ki a közös sebességet, de a megoldás második része elvileg jó, akkor maximálisan 10 pont adható a feladatra.

4. feladat:

A feladatnak két féle pontozása van, mert a 9. évfolyamosoknak eggyel kevesebb kérdést tűztünk ki. Az első pontszám a 10. évfolyam tanulóira vonatkozik, majd a 9. osztályosok pontszámát zárójelbe tettük.

a) A feladat nem mondja, hogy a *c/FA* vagy az *FA/c* hányados kell meghatározni, így bármelyik következetes használata teljes értékű.

A táblázat tartalmazza a megadott mérési adatokból kiszámítható hányadosokat!

c (ppm)	100	200	500	1000	2000	5000
FA (V)	0,496	1,003	2,497	4,998	9,999	25,001
FA/c (V/ppm)	0,004960	0,005015	0,004994	0,004998	0,0049995	0,0050002
c/FA (ppm/V)	201,6	199,4	200,2	200,1	200,0	200,0

Amint az adatokon is látszik, a nagyobb koncentrációk esetében kisebb a számított adatok ingadozása. Ez azért van, mert a mérés abszolút hibája állandó, ahogy azt a feladat szövege is tartalmazza. Így logikus és értékesebb, ha csak az utolsó mérési pontokból számolt értékeket átlagoljuk össze. Valószínűleg ez túlzott elvárás lenne a diákoktól. Így az arányossági tényező meghatározásánál csak azt kell elvárni a teljes pontszámhoz, hogy világosan és egyszerűen kiolvasható legyen a számítás módja. Lesz, aki a 6 hányadost összeátlagolja, vagy egyenest illeszt a mérési pontokra (grafikusan, vagy a kalkulátorában lévő programmal). Ezek egyike sem a legpontosabb ennél a méréstípusnál, de mégis fogadjuk el teljes értékűnek akkor is, ha nem fűz hozzá indoklást.

Ha kevesebb adatot használ fel, pl. az utolsókat, akkor kapja a legpontosabb eredményt. De ilyen kiértékeléshez mégis szükséges lenne az indoklás (nem szokásos, nem tanulhatta). Indoklás hiányát 2 pont levonásával jelezzük.

Ha a kedvezőtlenebb utat választja, és a legkisebb adatokból számol, akkor ez elvben a legpontatlanabb, még akkor is, ha a pozitív/negatív hibák csökkentik egymás hatását. Vélhetően ezt elég nehezen tudja indoklással alátámasztani, ekkor vonjunk le tőle 4 pontot.

Az arányossági tényező: $\underline{200,0\frac{\text{ppm}}{\text{V}}}$ vagy $\underline{0,0050\frac{\text{V}}{\text{ppm}}}$. Az összes számolt hányados felhasználásával kapott értékek: $200,2\frac{\text{ppm}}{\text{V}} \approx 200\frac{\text{ppm}}{\text{V}}$ vagy $0,004994\frac{\text{V}}{\text{ppm}} \approx 0,0050\frac{\text{V}}{\text{ppm}}$. **8(10) pont**

b) A mért koncentráció érték: $c = 0,842\ \text{V} \cdot 200\frac{\text{ppm}}{\text{V}} = \underline{168,4\ \text{ppm}}$. **3(5) pont**

c) A maximális eltérés: $\Delta c = 0,005\text{V} \cdot 200\frac{\text{ppm}}{\text{V}} = \underline{1\ \text{ppm}}$. **4(5) pont**

d) Egy gázkeverékben a parciális nyomások aránya megegyezik az anyagmennyiségek arányával. **1(0) pont**

Így esetünkben a vízgőz parciális nyomás: $\frac{168,4}{10^6} \cdot 10^5\ \text{Pa} = \underline{16,84\ \text{Pa}}$,

$1,013 \cdot 10^5$ Pa-lal számolva $\frac{168,4}{10^6} \cdot 1,013 \cdot 10^5\ \text{Pa} = \underline{17,06\ \text{Pa}}$ **2(0) pont**

A telített vízgőz parciális nyomása 20°C-on $p_t = 2,3339$ kPa (függvénytáblázatból):

A relatív páratartalom: $\frac{16,84\,Pa}{2334\,Pa} = 0,0072 \approx \underline{0,7\%}$ (0,73%). **2(0) pont**

A d) kérdésre adható más megoldások:

Kiszámolhatjuk a telített gőzben lévő vízkoncentrációt:

$$N_{t,víz} = \frac{p_t}{p_o} N_ö = \frac{2{,}3339\,\text{kPa}}{1{,}013\cdot 10^5\,\text{Pa}} 10^6 = \underline{2{,}30\cdot 10^4\ \text{ppm}},$$

a relatív páratartalom: $\dfrac{N_{víz}}{N_{t,víz}} = \dfrac{168{,}4\,\text{ppm}}{2{,}30\cdot 10^4\,\text{ppm}} = 0{,}73\%.$

A táblázatban megtalálhatjuk a telített vízgőz sűrűségét is 20°C-on: ρ_t=0,0173 kg/m^3, M= 18 g/mol ismeretében 1 m^3 térfogatban: $n_t = \dfrac{\rho_t}{M} 1\,\text{m}^3 = 0{,}961\,\text{mol}.$

Ugyancsak 1 m^3 térfogatban, 20°C-on és 10^5 Pa nyomáson: $n_ö = \dfrac{pV}{RT} = 41\,\text{mol}$, akkor a mérés helyén 1 m^3 térfogatban, 20°C-on és 10^5 Pa nyomáson a vízmolekulák mennyisége:

$\dfrac{168{,}4}{10^6} 41\,\text{mol} = 6{,}90\cdot 10^{-3}\,\text{mol}$, a relatív páratartalom: $\dfrac{6{,}90\cdot 10^{-3}\,\text{mol}}{0{,}961\,\text{mol}} = 0{,}72\%.$

5. feladat:

Adatok: f = 3, (a,b) p = áll. (c) T = áll. $\Delta E / Q = ?$ $W / Q = ?$

(a) ha p = áll.

$$\Delta E = \frac{f}{2} Nk\Delta T = \frac{f}{2}(V_2 p - V_1 p) = \frac{f}{2} p\left(V_2 - V_1\right),$$

$$W_{gáz} = p\left(V_2 - V_1\right), \qquad Q = \Delta E + W_{gáz} = \frac{f+2}{2} p\left(V_2 - V_1\right)$$

$$\frac{\Delta E}{Q} = \frac{f}{f+2} = \underline{60\%}.$$ **7 pont**

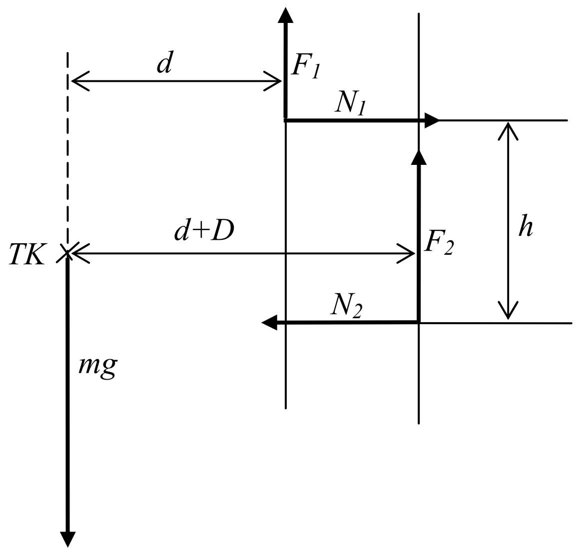
(b) $$\frac{W_{gáz}}{Q} = \frac{2}{f+2} = \underline{40\%}.$$ **5 pont**

(c) ha T = áll. $\Delta E = 0, \quad Q = W_{gáz}$ **4 pont**

$$\frac{\Delta E}{Q} = 0 = \underline{0\%}, \qquad \frac{W_{gáz}}{Q} = 1 = \underline{100\%}.$$ **4 pont**

6. feladat:

Adatok: m = 55 kg, D = 0,2 m, d = 0,4 m, μ_1= 0,4, μ_2= 1,2; (a) N = ? (b) h = ?



A rajzon megadott helyzetben, egyensúlyban van a sziklamászó és úgy gondoljuk, hogy a testrészei nem mozognak a tömegközépponthoz és egymáshoz képest sem. Ebben a helyzetben, mint merev testre írjuk fel az egyensúly feltételeit: vízszintes irányú erőkre (a kéznél fellépő húzóerő és a lábat nyomó erő)

$$N_1 - N_2 = 0 \quad \text{ahonnan } N_1 = N_2 \equiv N,$$

2 pont

(a párhuzamos és egyenlő nagyságú erők <u>erőpárt</u> alkotnak) a függőleges irányú erőkre:

$mg = F_1 + F_2$,   ahol a jobboldalon szerepel a két tapadási erő, melyekről feltételezzük, hogy éppen a lehető legnagyobb értékűek,

$F_1 = \mu_1 N \quad \textit{és} \quad F_2 = \mu_2 N$. **4 pont**

Az első egyenletből fejezzük ki a húzóerőt:

$$mg = \mu_1 N + \mu_2 N \quad \rightarrow \quad N = \frac{mg}{\mu_1 + \mu_2} = \underline{337,2\ \text{N}}.$$ **2pont**

A TK-ra, mint forgáspontra írjuk fel a forgatónyomatékokat (az erőpár forgatónyomatéka $N \cdot h$):

$$F_1 d + F_2 \left(d + D\right) - Nh = 0.$$ **5 pont**

A forgatónyomatékra vonatkozó egyenletet átalakítva:

$$Nh = \left(F_1 + F_2\right) d + F_2 D \quad \rightarrow \quad h = \frac{mgd + \mu_2 ND}{N} = \left(\mu_1 + \mu_2\right) d + \mu_2 D = \underline{0,88\ \text{m}}.$$ **3 pont**

Ha csökken bármelyik tapadási együttható, akkor
N növekszik, **2 pont**
h csökken. **2 pont**

7. feladat:

Adatok: D = 25 N/m, mg = 1N, h = 0,1 m; $E_{\text{kin,m}}$= ? $\Delta l_{\max}$= $y_{\max}$-h= ? y = ?

Mutasson az y tengely függőlegesen lefelé, a hasáb kezdetben legyen a kezdőpontban!

(a) Írjuk fel a munka-tételt, feltételezve, hogy a rugó valamennyire össze van nyomódva:

$$E_{kin}\left(y\right) = mgy - \frac{1}{2} D \left(y - h\right)^2 = -\frac{D}{2}\left(y - \frac{mg + Dh}{D}\right)^2 + mgh + \frac{\left(mg\right)^2}{2D},$$ miközben $y > h$,

$$E_{kin}\left(y\right) \leq mgh + \frac{\left(mg\right)^2}{2D} = 0,12\ \text{J} \quad \rightarrow \quad \underline{E_{kin,m} = 0,12\ \text{J}}.$$ **8 pont**

(b) Amikor a hasáb a lehető legmélyebben, $y_{\max}$ helyen van, ekkor a hasáb egy pillanatra megáll, a rugó maximális összenyomódása $\Delta l_{\max}$= $y_{\max}$– h:

Felírva a mechanikai energia-megmaradás tételét:

$$mg\left(h + \Delta l_{\max}\right) = \frac{1}{2} D \left(\Delta l_{\max}\right)^2, \quad \textit{innen} \quad \Delta l_{\max} = \frac{mg \pm \sqrt{\left(mg\right)^2 + 2Dhmg}}{D},$$ fizikai tartalma a pozitív megoldásnak van: $\Delta l_{\max}$= <u>13,8 cm</u>. **5 pont**

(c) Azt a magasságot keressük, ahol a mozgási energia $E_{1/2}$= 0,06 J:

A munkatételt y>h esetre írjuk fel:

$$E_{1/2} = mgy - \frac{1}{2} D \left(y - h\right)^2 \quad \rightarrow$$

$$y = \frac{mg + Dh \pm \sqrt{\left(mg\right)^2 + 2mgDh - 2DE_{1/2}}}{D}; \qquad \underline{y_1 = 20,93\ \text{cm}}, \ y_2 = 7,07\text{cm}.$$

Csak az y_1 lehet megoldás, y>h miatt. A hasáb a kezdőmagasságától számítva 20,93 cm-re lesz, ekkor a rugó 10,93 cm-t nyomódott össze. **4 pont**

Ez azt jelzi, hogy először akkor teljesül a feltétel, amikor a hasáb még nem éri el a rugót:

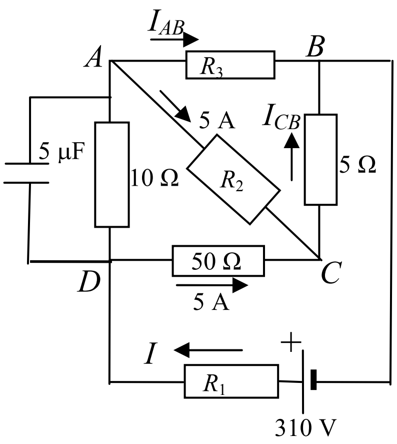
Erre az esetre is felírjuk a munkatételt:

$$E_{1/2} = mgy_2 \quad \rightarrow \quad y_2 = \frac{E_{1/2}}{mg} = \underline{6\ \ \text{cm}}.$$ **3 pont**

Ekkor a test az indulástól 6 cm-re, a rugó felett 4 cm-re van.

8. Feladat:

Ennél a feladatnál nagyon hatékonyan lehet dolgozni, ha kihasználjuk az adatokat: készítsünk egy ábrát, amelyben megbetűzzük a csomópontokat, így könnyebben tudjuk elmondani a megoldás menetét.



Adatok: Q = 1000 μC

A kondenzátor miatt: $U_{DA}= \dfrac{1000\mu\text{C}}{5\mu\text{F}} = 200$ V.

Így $I_{DA} = \dfrac{200\text{ V}}{10\,\Omega} = 20$ A, ebből a D csomópontot nézve azonnal adódik a telepen átfolyó áram erőssége:

$\underline{I} = 20A + 5A = \underline{25\text{ A}}.$ **5 pont**

Az A csomópontot nézve: $I_{AB} = 20A - 5A = 15$ A.

Az alsó mellékágban: $U_{DC} = 50\,\Omega \cdot 5\text{ A} = 250$ V.

Az ADC hurkot nézve:

$U_{AC} = U_{DC} - U_{DA} = 50\text{ V} \;\rightarrow\; \underline{R_2} = \dfrac{50\text{ V}}{5\text{ A}} = \underline{10\,\Omega}.$ **5 pont**

A C csomópont miatt $I_{CB} = 5\text{A} + 5\text{A} = 10$ A, így az

$U_{CB} = 10\text{ A} \cdot 5\,\Omega = 50\text{ V} \quad \rightarrow \quad U_{DB} = U_{DC} + U_{CB} = 300$ V, a főágban lévő ellenállást

számolhatjuk: $\underline{R_1} = \dfrac{310\text{ V} - U_{DB}}{I} = \dfrac{10\text{ V}}{25\text{ A}} = \underline{0,4\,\Omega}.$ **5 pont**

A B csomópontra: $I_{AB} + I_{CB} = I \quad \rightarrow \quad I_{AB} = 20$ A. Innen $\underline{R_3} = \dfrac{U_{AB}}{15\text{ A}} = \dfrac{U_{DB} - U_{DA}}{15\text{ A}} = \dfrac{100\text{ V}}{15\text{ A}} = \underline{6,67\,\Omega}.$

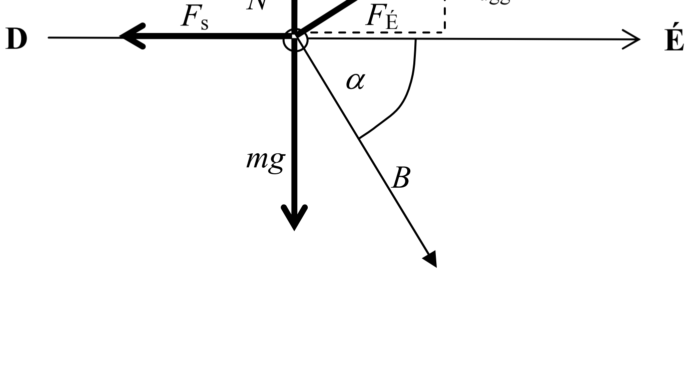
5 pont

Az ellenállások értékei, sorban: 0,4 Ω, 10 Ω, 6,67 Ω és a telepen (a főágban) folyó áram 25 A.
Megjegyzés: Előfordulhat, hogy valaki azt feltételezi, hogy a kondenzátor felső lemeze pozitív töltésű. Ebből előbb utóbb ellentmondásra jut. Ha ezt kimutatja, de a másik esetet nem vizsgálja meg, adjunk 5 pontot a munkájára.

9. feladat:

Adatok: $\rho = \dfrac{m}{l} = 1\dfrac{\text{g}}{\text{cm}} = 0{,}1\dfrac{\text{kg}}{\text{m}}$, I = 1,5 A (nyugat felől keletre), μ = 0,2, $B_{\min}$=? α = ?

Készítsünk egy olyan rajzot, amely síkja függőleges, és merőleges az áramvezetőre, a néző fele folyik az áram, vagyis a néző keletről tekint a rajzra. A rajzon a „vízszintes” tengely D-É irányú:



feltételezzük, hogy v = áll., akkor

$\sum \vec{F}_i = 0.$

Vízszintes komponensekre:

$F_É - F_s = 0,$

a függőleges komponensekre:

$N + F_{függ} - mg = 0,$

továbbá :

$F_s = \mu N,\; F_É = F_L \sin\alpha,\; F_{függ} = F_L \cos\alpha$

Az egyenletrendszer megoldására több út

is van, itt olyan megoldást mutatunk, ahol teljes négyzetté kiegészítéssel kereshető szélsőérték. Fejezzük ki a Lorentz-erő komponenseit, majd emeljük négyzetre és adjuk össze őket, a teljes négyzetté alakítás után meg tudjuk a Lorentz erő minimumát is határozni:

$$F_L \sin\alpha = \mu N,\; F_L \cos\alpha = mg - N \quad \to \quad F_L^2 \sin^2\alpha = (\mu N)^2,\; F_L^2 \cos^2\alpha = (mg - N)^2$$

$$F_L^2 \sin^2\alpha + F_L^2 \cos^2\alpha = (\mu N)^2 + (mg - N)^2$$

$$F_L^2 = (\mu N)^2 + (mg - N)^2 = (1+\mu^2)N^2 - 2mgN + (mg)^2$$

$$F_L^2 = (1+\mu^2)\left(N - \frac{mg}{1+\mu^2}\right)^2 + (mg)^2 - \frac{(mg)^2}{1+\mu^2} \le (mg)^2 - \frac{(mg)^2}{1+\mu^2},$$

$$F_{L,\min} = mg\sqrt{1-\frac{1}{1+\mu^2}}, \quad \text{amikor} \quad N = \frac{mg}{1+\mu^2}.$$

Másrészt: $F_L = BIl, \quad B_{\min} = \dfrac{F_{L,\min}}{Il} = \dfrac{mg}{Il}\sqrt{1-\dfrac{1}{1+\mu^2}} = \dfrac{m}{l}\dfrac{g}{I}\sqrt{1-\dfrac{1}{1+\mu^2}} = \underline{0{,}128\ \text{T}}.$

Pontozás: Ha valamennyi szükséges egyenlet fel van írva, **5 pont**
egy jó ábra **3 pont**
ha a Lorentz erő, vagy a mágneses indukció ki van fejezve pl. α, vagy N függvényében **3 pont**
a szélsőérték bármilyen úton történő megkeresése (deriválás, vagy közelítő megoldás is), ha le van írva az út **4 pont**
$B_{\min}$ kifejezése, és numerikus számértéke **2 pont**
A mágneses indukció irányának meghatározása:

$$\sin\alpha = \frac{\mu N_{\min}}{F_{L,\min}} = \frac{\mu\dfrac{mg}{1+\mu^2}}{mg\sqrt{1-\dfrac{1}{1+\mu^2}}} = \frac{1}{\dfrac{1+\mu^2}{\mu}}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\mu^2-1}{1+\mu^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad \to \quad \alpha = \underline{78{,}7^0}.$$ **3 pont**

Az egyenletek rendezésének valószínűleg egy gyakrabban bejárt útja az lesz, hogy a szög marad a B kifejezésében: $B = \dfrac{\rho g}{I}\dfrac{\mu}{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}$. Ekkor $f(\alpha) = \mu\cos\alpha + \sin\alpha$ függvény maximumát kell megkeresni, amely elég változatosan történhet, differenciálással, grafikus kijelzővel rendelkező kalkulátorral, vagy numerikusan. Mindegyiket fogadjuk el teljes értékűnek.

10. feladat

Adatok: λ= 0,8 nm, $\Delta t = 10^{-17}$s, W = 10 mJ, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ As/Vm, $c = 3\cdot10^8$ m/s, A = 1 mm^2, P_{Paks}= 2000MW=$2\cdot10^9$ W, $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Js, $r_0 = 5{,}2\cdot10^{-11}$m, (a) n = ? (b) $P_{\text{imp}}/P_{\text{Paks}}$=? (c) N_{foton}= ? (d) E = ? (e) E/E_{H}=?

(a) Vákuumban a hullámcsomag fénysebességgel terjed, az impulzushossz térben $c\cdot\Delta t$, ezt kell összehasonlítani a központi hullámhosszal: $n = \dfrac{c\cdot\Delta t}{\lambda} = \dfrac{30\cdot10^{-10}m}{8\cdot10^{-10}m} = \underline{3{,}75}.$ **4 pont**

(b) Az impulzus átlagteljesítménye a nagyon rövid idő miatt óriási: $P_{imp} = \dfrac{W}{\Delta t} = \dfrac{10^{-2}J}{10^{-17}s} = 10^{15}$ W.

A két teljesítmény összehasonlításánál ne felejtsük el, hogy az atomerőmű hosszú idő alatt biztosítja a megadott teljesítményt, még a lézer csak „ritkán”, de akkor nagyot: $\frac{P_{imp}}{P_{Paks}} = \frac{10^{15}\,\mathrm{W}}{2\cdot 10^{9}\,\mathrm{W}} = \underline{5\cdot 10^{5}}$.

3 pont

(c) Először számítsuk az impulzust alkotó fotonok átlagos energiáját:

$$w = h\cdot\nu = h\cdot\frac{c}{\lambda} = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\cdot 3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{8\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}} = 2,486\cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}.$$

Az egyetlen impulzusban lévő fotonok száma:

$$N_{foton} \approx \frac{W}{w_{átl}} = \frac{10^{-2}\,\mathrm{J}}{2,486\cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}} = \underline{4,02\cdot 10^{13}}.$$

3 pont

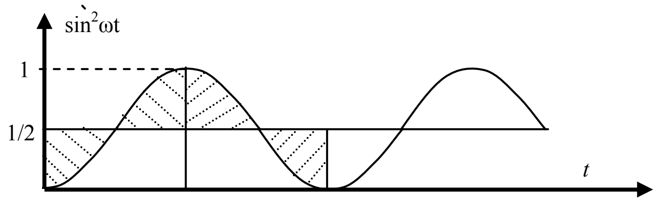
(d) Kiindulhatunk a táblázatokban is szereplő összefüggésekből: az elektromágneses tér energiasűrűsége:

$$\rho_{energia} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2, \text{ továbbá tudjuk,hogy } \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2, \text{ azaz } \rho_{energia} = \varepsilon_0 E^2.$$

Az elektromágneses hullámokban az elektromos térerősség (és B is) időben szinuszosan változik. Feltételezzük, hogy az ilyen nagyon rövid lézerimpulzusban is szinuszosan közelíthető a térerősség-idő függvény, akkor az energiasűrűség átlaga:

$$\overline{\rho_{energia}} = \varepsilon_0\overline{E^2} = \varepsilon_0\overline{E_{\max}^2\sin^2\omega t} = \varepsilon_0 E_{\max}^2\overline{\sin^2\omega t} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{\max}^2.$$

Ez utóbbi lépést könnyen beláthatjuk, ha felrajzoljuk a $\sin^2(\omega t)$ függvényt: az azonos módon satírozott területek egyenlőek, de a függvénytáblázatból is megállapítható ugyanez.



Másrészt az átlagos energiasűrűség az impulzus adataival is kifejezhető:

$$\overline{\rho_{energia}} = \frac{W_{imp}}{V_{imp}} = \frac{W_{imp}}{A\cdot c\cdot\Delta t} = \frac{10^{-2}\,\mathrm{J}}{10^{-6}\,\mathrm{m}^2\cdot 3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}\cdot 10^{-17}\,\mathrm{s}} = 3,33\cdot 10^{12}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}.$$

Innen a térerősség maximuma:

$$E_{\max} = \sqrt{\frac{2W_{imp}}{\varepsilon_0 cA\Delta t}} = \sqrt{\frac{2\overline{\rho_{energia}}}{\varepsilon_0}} = \underline{8,68\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}.$$

6 pont

A térerősség négyzetének átlagából az effektív érték számolható ki:

$E_{eff} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}} = \underline{6,14\cdot 10^{11}\,\mathrm{V/m}}$. Ez utóbbiért megadható a pont, ha nem utal a megoldó, hogy itt valami átlagot számol, akkor <u>itt</u> vonjunk le 1 pontot.

(e) A hidrogén atomban, alapállapotban az elektron magtól való távolsága r_0:

$$E_H = k\frac{e}{r_0^2} = 9\cdot 10^{9}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\,\frac{1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{\left(5,2\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}\right)^2} = 5,33\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}},$$

3 pont

a térerősségek hányadosa: $\frac{E_{\max}}{E_H} = \underline{1,63}$, *illetve* $\frac{E_{eff}}{E_H} = \underline{1,20}$.

1 pont