Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny
2007 / 2008

MEGOLDÓKULCS

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen az egyedi megoldások pontozását Önökre kell bízzuk.
A feladatok megoldásánál a g = 9,81 m/s^2 értéket használjuk. A megoldás g = 10 m/s^2 esetén is teljes értékűnek tekinthető.

1. feladat:

v_1 = 2 cm/s= $2\cdot10^{-2}$m/s, v_2 = 3 cm/s= $3\cdot10^{-2}$m/s, f= 5kHz

Két felvillanás között eltelt idő $\Delta t = \frac{1}{f} = 2\cdot 10^{-4}\,s$, **4 pont**

A foltok középpontjainak távolsága

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t = 4\cdot 10^{-6}\,m \qquad \Delta x_2 = v_2 \Delta t = 6\cdot 10^{-6}\,m$$ **3+3=6 pont**

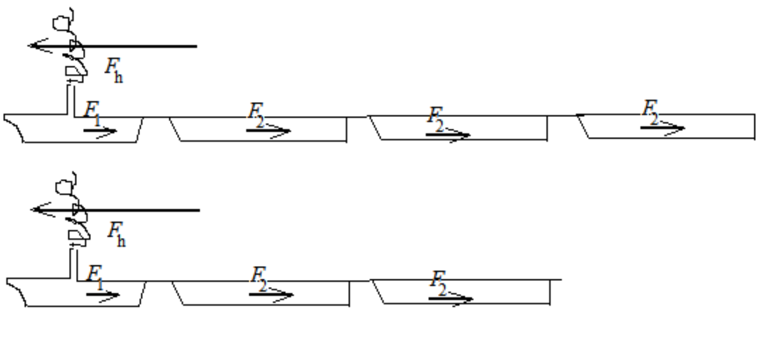
Feltételezzük, hogy a lézer felvillanásának az ideje nagyon rövid, így a keletkező lyuk mérete nem függ az asztal sebességétől (ez így is van): a szöveg azt sugallja, hogy egy-egy lyuk közelíthető kör alakkal.
Összefüggő vágat akkor keletkezhet, ha a két szomszédos lyuk átfedi egymást, azaz a középpontjaik távolsága kisebb, mint a sugár kétszerese, különálló lyukak pedig akkor keletkeznek, ha a középpontjaik távolsága nagyobb, mint a sugár kétszerese:

$$\Delta x_1 < 2r < \Delta x_2$$

Vagyis a sugár nagyobb, mint 2 μm, és kisebb, mint 3 μm. **2*5=10 pont**

2. feladat:

m_1 = 12 t= $1{,}2\cdot10^4$kg, m_2 = 30 t= $3\cdot10^4$kg, v_1= 4 m/s, F_1=1,5 kN, F_2=2 kN



Kezdetben a mozgás sebessége állandó, ezért az eredő erő zérus. Ebből meg tudjuk határozni a vontatóhajó húzóerejét:

$F_h = F_1 + F_2 + F_2 + F_2 = 7{,}5$ kN , **3 pont**

Az utolsó uszály leszakadásakor még nem változott meg a sebesség, ezért az ellenállási erők nem változnak meg. Kiszámolható a kezdeti gyorsulás:

$$F_h - (F_1 + F_2 + F_2) = (m_1 + m_2 + m_2)\,a,\quad a = \frac{2\,\text{kN}}{72\cdot 10^3\,\text{kg}} = 0{,}028\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2{,}8\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$ **5 pont**

Miközben gyorsul a megmaradt rész, egyre nagyobb lesz a közegellenállási erő, ezért a gyorsulás csökken egészen addig, amíg a húzóerő egyenlő lesz az új ellenállási erők összegével. Használjuk fel, hogy a közegellenállási erő arányos a sebesség négyzetével:

$\frac{F_1^*}{F_1}=\frac{v^2}{v_0^2}$, innen $F_1^*=F_1\frac{v^2}{v_0^2}$, és $\frac{F_1^*}{F_1}=\frac{v^2}{v_0^2}$, innen $F_2^*=F_2\frac{v^2}{v_0^2}$, **5 pont**

majd írjuk fel a mozgásegyenletet arra az esetre, amikor a sebesség már ismét állandó lesz:

$F_h-\left(F_1^*+2F_2^*\right)=0,$ *azaz* $F_h=F_1\frac{v^2}{v_0^2}+2F_2\frac{v^2}{v_0^2}.$ **4 pont**

Innen $v=\sqrt{\frac{F_h\cdot v_0^2}{F_1+2F_2}}=4{,}67\frac{m}{s}.$ **3 pont**

3. feladat:

v_{gy}=100 km/h=27,8 m/s, t_{gy}=10s,
v_{m1}=50km/h=13,89m/s, v_{m2}=30km/h=8,33m/s, s_m=50 m
v_0=50km/h=13,89 m/s, s_0=100 m, t_0=10 s

Legkisebb időveszteséggel akkor jutunk át az útkereszteződésen, ha a lámpánál vagyunk (azaz azon a vonalon, ami a lámpa előtti megállás helyét kijelöli) és sebességünk a megengedett maximális 50 km/h, a lámpa zöldre váltásának pillanatában. **2 pont**

Az álló autó ebben a pillanatban a következőt teszi: maximálisan gyorsít, míg eléri a v_0 sebességet. **2 pont**

Kiszámítjuk a maximális gyorsulást: $a_{gy}=\frac{v_{gy}}{t_{gy}}=2{,}78\frac{m}{s}.$ **1 pont**

Ezzel a gyorsulással fele akkora sebességet $t_{gy}^*=\frac{t_{gy}}{2}=5s$ alatt ér el, **1 pont**

Ez alatt megtett útja, $s_{gy}^*=\frac{v_0}{2}t_{gy}^*=34{,}7\,\text{m}$. **1 pont**

Ezt az utat a v_0 sebességgel induló autó $t^*=\frac{s_{gy}^*}{v_0}=2{,}50\,\text{s}$ alatt teszi meg. **1 pont**

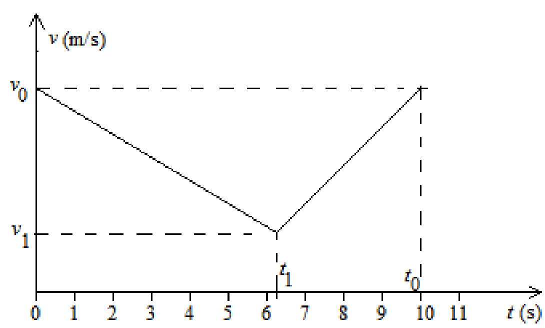
Feltételezve, hogy a kereszteződés után 35 m-rel még szabad az út, a két mozgással a kereszteződésen való átjutás időkülönbsége: $t_{gy}^*-t^*=2{,}5\,\text{s}$. **1 pont**

Most vizsgáljuk meg, hogy hogyan kell megközelíteni a kereszteződést, hogy a zöldre váltás pillanatában a kocsi a kereszteződéshez v_0 sebességgel érkezzen:

Ha motorfékkel közlekedünk, akkor a lassulás:

$s_m=\frac{v_{m1}+v_{m2}}{2}t_m=\frac{v_{m1}+v_{m2}}{2}\cdot\frac{|v_{m2}-v_{m1}|}{|a_m|}$, . **2 pont**

innen $|a_m|=\frac{v_{m1}^2-v_{m2}^2}{2s_m}=1{,}24\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



Tételezzük fel, hogy műszakilag lehetséges az ábrán vázolt megoldás. **Ábra: 4 pont**

A görbe alatti terület, a megteendő 100 méterrel egyenlő. Az első szakaszon az előbb kiszámított lassulással mozog a kocsi, a második szakaszon pedig legfeljebb a maximális gyorsulással mozoghat, de ott ennél kisebb gyorsulás is megengedett. Kiszámítjuk ezen a szakaszon a legkisebb sebességet v_1-et:

$s_0=\frac{v_0+v_1}{2}t_0$, innen $v_1=\frac{2s_0}{t_0}-v_0=6{,}11\frac{\text{m}}{\text{s}}=22{,}0\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **2 pont**

Motorfékkel haladunk: $t_1 = \frac{v_0 - v_1}{|a_m|} = 6,27\,\text{s}$ ideig, **1 pont**

majd gyorsítunk $a = \frac{v_0 - v_1}{t_0 - t_1} = 2,09\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(\le a_{gy}\right)$ gyorsulással, **1 pont**

amit az autó műszaki adatai meg is engednek. **1 pont**

4. feladat:

v_{max}= 130 km/h= 36,1 m/s, r_1=1000 m, r_2=1000+3,75 m=1003,75 m

μ_1=0,08, μ_2=0,4

Először megvizsgáljuk, hogy a különböző tapadási együtthatók esetén mekkora sebességgel lehetne a pályán, megcsúszás veszélye nélkül haladni:

Ha körpályán állandó sebességgel halad egy autó, akkor eredő erő, amit a tapadási erő biztosít: $F_{er} = m\frac{v^2}{r} \le \mu_0 mg$, innen $v \le \sqrt{\mu_0 rg}$. **4 pont**

Csúszós úton a belső sávban: $v_{b'} \le 28,0$ m/s=100,8 km/h, a külsőben $v_{k'} \le 28,07$m/s=101,04km/h, **3 pont**

jó útviszonyok között $v_{b''} \le 62,6$ m/s=225,5 km/h lenne, amely messze meghaladja a megengedett maximális értéket (a külső sávban még több lenne). **1 pont**

Csúszós úton a minimális idő, a lehető legnagyobb sebességgel érhető el:

$$\frac{t_{k'}}{t_{b'}} = \frac{\dfrac{r_2\pi}{2\sqrt{\mu_1 r_2 g}}}{\dfrac{r_1\pi}{2\sqrt{\mu_1 r_1 g}}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = 1,0019 .$$ **4 pont**

Jó útviszonyok között a sebesség mindkét sávban v_{max}=130 km/h lesz, ekkor:

$$\frac{t_{k''}}{t_{b''}} = \frac{\dfrac{r_2\pi}{2v_{max}}}{\dfrac{r_1\pi}{2v_{max}}} = \frac{r_2}{r_1} = 1,0038.$$ **4 pont**

A keresett idők pedig:

$$t_{k'} = \frac{r_2\pi}{2\sqrt{\mu_1 r_2 g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_2}{\mu_1 g}} = 56,15\,\text{s} = 0,935\,\text{min}\ ,\quad t_{b'} == \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_1}{\mu_1 g}} = 56,04\,\text{s} = 0,934\,\text{min}\ ,$$

$$t_{k''} = \frac{r_2\pi}{2v_{max}} = 43,65s = 0,728\,\text{min}\ ,\quad t_{b''} = \frac{r_1\pi}{2v_{max}} = 43,49s = 0,725\,\text{min}$$ **4*1=4 pont**

5. feladat:

V= 27 l= 0,027m^3 , T= 25°C, p=6,404·10^{6}Pa, ρ_g= 238 kg/m^3, ρ_f= 714 kg/m^3,

m_0= 45 kg, h= 1,15 m, m = 13 kg

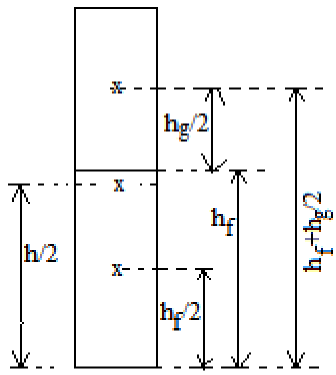
Először meg kell határozni a palackban lévő gőz és folyadék tömegét és térfogatát, és a magasságokat:

$$V_g\rho_g + \left(V - V_g\right)\rho_f = m.$$ **2 pont**

Innen a következő adatokat lehet kiszámítani:

$$V_g = \frac{V\cdot\rho_f - m}{\rho_f - \rho_g} = 13,191 \approx 0,0132\,\text{m}^3,\ m_g = V_g\cdot\rho_g = 3,14\,\text{kg},$$

$$h_g = \frac{V_g}{V}h = 0,562\,\text{m}$$, **3 pont**



Ábráért: 4 pont

$V_f = 27l - 13,2l = 13,81l,\ m_f = 9,86\,\text{kg},\ h_f = 0,588\,\text{m}.$ **3 pont**

A tömegközéppont meghatározásához célszerű egy ábrát rajzolni, a szükséges jelölésekkel:

$$y_{tk} = \frac{m_f \dfrac{h_f}{2} + m_0 \dfrac{h}{2} + m_g\left(h_f + \dfrac{h_g}{2}\right)}{m_f + m_0 + m_g} = \frac{31,49\,\text{kg}\cdot\text{m}}{58\,\text{kg}} = 0,543\,\text{m}.$$ **3 pont**

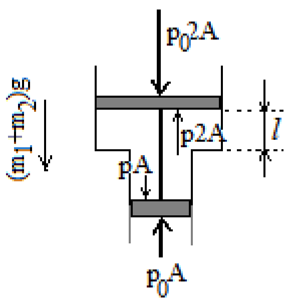
Mivel a folyadék sűrűsége nagyobb a gőzénél, ha mindkét fázis egyidejűleg jelen van, akkor a CO_2 tömegközéppontja a palack félmagassága alatt van. Így a teljes rendszer tömegközéppontja alacsonyabban van, mint $h/2$. **1 pont**

Akkor lehet legmagasabban a tömegközéppont, ha a töltetnek a legmagasabban van a tömegközéppontja, ez akkor lesz, amikor a palackban csak gőz, vagy csak folyadék van. Ekkor a teljes rendszer tömegközéppontja $h/2$ magasan van. **2 pont**

Ez utóbbi rendkívül robbanásveszélyes (minimális hőmérsékletemelkedés esetén is óriásra nőne a nyomás), ezért a másik lesz a megoldás, amikor csak gőz van a tartályban.

Ehhez az kell, hogy az m^* töltőtömeg ne legyen nagyobb, mint ami a teljes palackot telített gőzzel töltené meg: $m^* \le V \cdot \rho_g = 6,43\,\text{kg}$. **2 pont**

6. feladat:



Célszerű a dugattyúkra ható erőket az ábrába berajzolni (kivéve a rúd által kifejtett erőket, melyek összege 0). A dugattyúk egyensúlyban vannak, akkor a rájuk ható erők eredője nulla:

Ábra az erőkkel: 3 pont

$p_0 2A + (m_1 + m_2)g + p \cdot A - p \cdot 2A - p_0 A = 0.$ **3 pont**

Innen: $p = \dfrac{p_0 A + (m_1 + m_2)g}{A}$, **2 pont**

Vegyük észre, hogy a gáz nyomása nem függ a hőmérséklettől, vagyis ez a folyamat izobar lesz. **3 pont**

A hőmérséklet növekedésekor, a térfogat is nő, a dugattyúk felfelé mozdulnak el. **1 pont**

Írjuk fel a Gay-Lussac I. törvényét:

$$\frac{V_1}{T} = \frac{V_2}{T + \Delta T}, \qquad \frac{l \cdot 2A + l \cdot A}{T} = \frac{(l + \Delta l) \cdot 2A + (l - \Delta l) \cdot A}{T + \Delta T}$$ **3 pont**

Innen a dugattyú Δl elmozdulása: $\Delta l = \dfrac{3l\Delta T}{T}$.

A T-t kifejezzük a gázokra vonatkozó állapotegyenletből: $p(l \cdot 2A + l \cdot A) = nRT,\ \ T = \dfrac{3plA}{nR}$. **3 pont**

A dugattyúk elmozdulása: $\Delta l = \dfrac{3l\Delta T}{\dfrac{3plA}{nR}} = \dfrac{nR\Delta T}{A\dfrac{(m_1 + m_2)g + p_0 A}{A}} = \dfrac{nR\Delta T}{(m_1 + m_2)g + p_0 A}$. **2 pont**

7. feladat:

m_1= 30 g= 0,03 kg, T_1=20°C, ΔT= 80°C, η=70%, c= 4,18 $\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$, L_f=$2,26\cdot10^6\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$, t= 60 s

m_2= 3 g= 0,003 kg, d= 1μm=10^{-6}m, r=$5\cdot10^{-7}$m, α=0,073 J/m^2, P_2= 30 W

Először a melegítés, elforralás elvén működő készülékre végezzük el a számításokat.

A melegítésre fordított munka 1 perc alatt, és a teljesítmények:

$W_h = m_1\left(c \cdot \Delta T + L_f\right) = 77,8\,\text{kJ}$, **4 pont**

$P_h = \dfrac{W_h}{t} = (1,297kW =)1,30\,\text{kW}$, **2 pont**

$P_{felvett} = \frac{P_h}{\eta} = 1{,}85\,\mathrm{kW}$. **2 pont**

Az ultrahangos készülékkel kapcsolatos számítások:

Egyetlen csepp térfogata, ill. tömege: $V_1 = \frac{4r^3\pi}{3} = 5{,}23\cdot 10^{-19}\,\mathrm{m}^3$, $m^* = V_1\rho = 5{,}23\cdot 10^{-16}\,kg$ **2 pont**

A cseppek száma: $N_{cs} = \frac{V}{V_1} = \frac{3m_2}{\rho\cdot 4r^3\pi} = 5{,}73\cdot 10^{12}$. **1 pont**

Egy csepp, ill. az összes csepp felszíne: $A_1 = 4r^2\pi$, $A = N_{cs}\cdot A_1 = \frac{3m_2}{\rho\cdot r} = 18\,\mathrm{m}^2$. **2 pont**

A 3 g víz kezdeti felszíne elhanyagolható, a feldarabolás utánihoz képest: $\Delta A \approx A$ **1 pont**

A daraboláskor végzett munka: $W_{uh} = \alpha\cdot\Delta A = 1{,}314\,\mathrm{J}$. **4 pont**

A hasznos teljesítmény, és a hatásfok: $P_{uhh} = \frac{W_f}{t} = 0{,}022\,\mathrm{W}$, $\eta_{uh} = 0{,}073\%$. **2 pont**

8. feladat:

d_0= 1 mm, r_0=$5\cdot 10^{-4}$ m, ρ= $5\cdot 10^{-7}$ Ωm, I= 5A, λ= 0,2 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}$, d_1=0,1 mm, d_2= 2 mm

Az l hosszúságú vezetékben időegység alatt termelődő Joule-hő:

$\frac{Q}{t} = I^2R = I^2\frac{\rho l}{r_0^2\pi} = 15{,}92\frac{W}{m}l$. **2 pont**

A vékonyabb szigetelés külső és belső felülete kicsit különbözik:

$\frac{A_k}{A_b} = \frac{2(r_0+d_1)\pi l}{2r_0\pi l} = \frac{r_0+d_1}{r_0} = 1{,}2.$

A hővezetőképesség dimenziója: $\frac{[teljesítmény]}{[hosszúság][hőmérséklet]}$ alapján, és a szövegben elmondottak szerint kikövetkeztethető, hogy: $\frac{Q}{t} = \lambda A\frac{\Delta T}{d}$ összefüggés írható fel. A keresztmetszet változását elhanyagoljuk: **1 pont**

$\frac{Q}{t} = \lambda A_b\frac{\Delta T}{d_1}$, $I^2\frac{\rho l}{r_0^2\pi} = \lambda\cdot 2r_0\pi l\frac{\Delta T}{d_1}$, **2 pont**

innen $\Delta T = \frac{I^2\rho d_1}{2r_0^3\pi^2\lambda} = 2{,}54\,\mathrm{K}$. (Esetleg számolhatott a külső felülettel is, akkor 2,11K adódik, vagy számolhat a középértékkel, akkor 2,31 K adódik. Bármelyik elfogadható.) **2 pont**

A vastagabb szigetelés esetén $\frac{A_k'}{A_b'} = \frac{2(r_0+d_2)\pi l}{2r_0\pi l} = \frac{r_0+d_2}{r_0} = 5{,}0.$ Itt nem hanyagolhatjuk el azt, hogy a felület, amelyen a hő átvezetődik egyre nagyobb, ötszörösére megnő. **1 pont**

A szigetelő réteget bontsuk fel Δd falvastagságú csövekre, ahol Δd legyen elegendően kicsi ahhoz, hogy a fentiek szerint dolgozhassunk. Itt kínálkozna Δd-re a 0,1 mm-es érték.

Osszuk fel a szigetelést N részre: $\Delta d = \frac{d_2}{N}$. Minden rétegen, a falra merőlegesen, ugyanannyi hőnek kell áthaladnia, ha időben már állandósult a hőmérsékletkülönbség:

Az i-ik rétegre felírva a hőmérsékletkülönbséget:

$$\Delta T_i = \frac{I^2\rho\Delta d}{2r_0^2(r_0+d_i)\pi^2\lambda} = \frac{I^2\rho\Delta d}{2r_0^2\left(r_0+(i-1)\Delta d\right)\pi^2\lambda} = \frac{I^2\rho\Delta d}{2r_0^2\pi^2\lambda}\frac{1}{\left(r_0+(i-1)\Delta d\right)} = 12{,}68K\frac{\Delta d}{\left(r_0+(i-1)\Delta d\right)}.$$

Ha az összes rétegen kialakuló hőmérsékletkülönbséget összeadjuk, akkor a szigetelő két határán a hőmérsékletkülönbségre a következő közelítő értékeket kaphatjuk, melyek mindig felülről becsülik a valódi értéket:

$$\Delta T^* \approx 12,68K\frac{d_2}{N}\left[\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_0+\frac{d_2}{N}}+...+\frac{1}{\left(r_0+(i-1)\frac{d_2}{N}\right)}+...+\frac{1}{\left(r_0+(N-1)\frac{d_2}{N}\right)}\right],$$

Alulról is becsülhetjük a hőmérsékletkülönbséget:

$$\Delta T^* \approx 12,68K\frac{d_2}{N}\left[\frac{1}{r_0+\frac{d_2}{N}}+...+\frac{1}{\left(r_0+(i-1)\frac{d_2}{N}\right)}+...+\frac{1}{\left(r_0+(N-1)\frac{d_2}{N}\right)}+\frac{1}{r_0+d_2}\right].$$

N	ΔT_f^*(K) (felülről becsülve)	ΔT_a^{**}(K) (alulról becsülve)
1	50,7	10,1
2	33,81	13,6
4	26,4	16,2
5	25,1	17,0
8	23,2	18,1
10	22,6	18,51
20	21,5	19,4

Azt tudjuk mondani, bármelyik N-re, hogy $\Delta T_a^{**} < \Delta T^* < \Delta T_f^{**}$.

A maradék 12 pontra nézve a pontozási javaslat:

Ha csak egyik irányból készült becslés, akkor
N < 5, akkor 4 pont,
N ≥ 5, akkor 6 pont,
N ≥ 8, akkor 8 pont.
Ha a másik irányból is van becslés, akkor adjunk további 4 pontot.
Ha a pontos értéket megadja megfelelő indoklással, akkor szintén jár a 12 pont.

Megjegyzés: (Az első részben a pontos érték: $\Delta T = 2,31\text{K}$.) A vastagabb szigetelésnél a pontos értéket a $\Delta T^* = 12,68K\ln\frac{r_0+d_2}{r_0}$ összefüggés adja, amelyből ΔT^*=20,4 K.

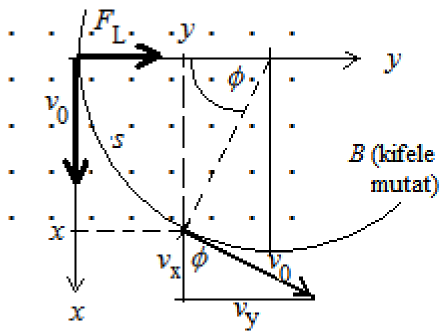
9. feladat:

m= 2,5·10^{-9} kg, Q= –3,0 μC, B_z= 0,4 T, t=0-ban v_0= 200 m/s, s = 0,5 m

Mivel a kezdeti pillanatban a homogén mágneses tér indukció vektora merőleges a sebességre, a részecske körpályán fog mozogni.
A pálya az x-y síkban fekszik,
a negatív töltés miatt a Lorentz erő az y tengely irányába mutat,
a kör érintője a kezdeti sebesség, ezért a pálya középpontja az y tengelyen van. **2 pont**

A pálya sugara a dinamika alapegyenletéből:

$|Q|v_0B = m\frac{v_0^2}{r}$, *innen* $r = \frac{mv_0}{|Q|B} = 0,417\text{ m}.$ **4 pont**



Ábra 6 pont

A φ értéke:

$\varphi = \frac{s}{r} = 1,2\ rad = 68,8^{\circ}$. **1 pont**

A 0,5 méter út után a helykoordináták: $x = r\sin\varphi = 0,389$ m, $y = r - r\cos\varphi = 0,266$ m. **3 pont**

Sebességének nagysága a kezdősebességgel egyenlő, iránya az ábrán látható, komponensei:

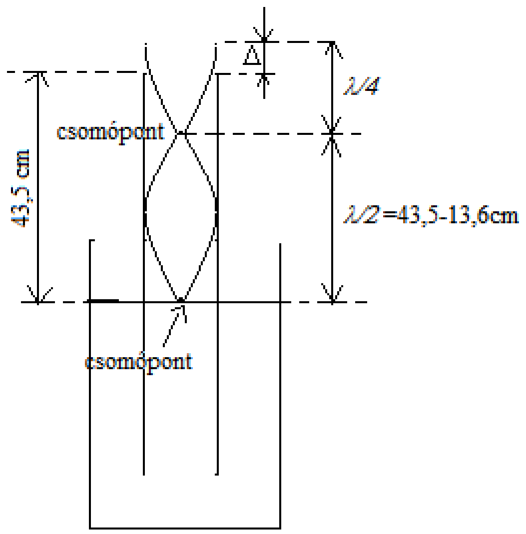
$v_x = v_0 \cos\varphi = 72{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_y = v_0 \sin\varphi = 186{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **2 pont**

Az ezzel egyenértékű válaszok is elfogadhatóak, pl. a sebessége 200m/s, és a sebességvektor az x tengellyel 68,8°-os szöget zár be.

A 0,5 méter utat $t = \frac{s}{v_0} = 2{,}5\,\text{ms}$ idő alatt teszi meg. **2 pont**

10. feladat

f= 512 Hz, l_1= 13,6 cm, l_2= 43,5 cm



A rajzon jól látható, hogy a második rezonancia esetén melyik adat melyik távolságnak felel meg. Az első rezonanciát akkor kapjuk, ha a vízszint egybeesik a magasabb csomóponttal. A víz fölötti rész változatlan marad.
Az ábra a pontos eligazodást szolgálja, ezért nagyon értékes a megoldás szempontjából. **10 pont**
A számolás nagyon egyszerű ezután. Először a hullámhossz határozható meg:

$l_2 - l_1 = \frac{\lambda}{2}$, $\lambda = 2(l_2 - l_1) = 59{,}8\text{ cm}$. **4 pont**

Ebből a hang sebessége: $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 306{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3 pont

A végkorrekció:

$\frac{\lambda}{4} = l_1 + \Delta$, $\Delta = \frac{\lambda}{4} - l_1 = 1{,}35\text{ cm}$. **3 pont**