Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny
2005 / 2006

MEGOLDÁSOK

1. $a = 400\,g$, $s = 0{,}6$ cm $= 6\cdot10^{-3}$ m

I. Megoldás a munka-tétel alkalmazásával:

$W = F\cdot s = m\cdot a\cdot s = m\cdot g\cdot h \rightarrow h = \frac{a\cdot s}{g} = \underline{\underline{2{,}40\ \mathrm{m}}}$ **10 pont**

Itt h a talaj szintjétől mért távolság, amely alig különbözik a függőleges hajítás magasságától a 2,394 m-től.
A levegőben tartózkodik a talajtól való elvállástól, a leérkezésig (tegyük fel, hogy a leérkezéskor kb. 6 mm-es úton és a nagyságú lassulással fékeződik le)

$t = 2\cdot t_{le} = 2\cdot\sqrt{\frac{2(h-s)}{g}} = \underline{\underline{1{,}40\ \mathrm{s}}}$ ideig. **10 pont**

II. Függőleges hajítás egyenleteivel:

az elugrás szakaszára $v_0 = \sqrt{2\cdot a\cdot s} = 6{,}86\ \mathrm{m/s}$, $t_{gy} = \frac{v_0}{a} = 1{,}75\ \mathrm{ms}$ **5 pont**

majd a levegőben való mozgásra:

$t_{fel} = t_{le} = \frac{v_0}{g}$ és $h - s = v_0\cdot t_{fel} - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_{fel}^2$ egyidejű megoldásával adódnak a fenti értékek.

15 pont

Megjegyzés: Az időtartamot esetleg választhatja a teljes időre is, a magasságból hiányozhat a lábak hossza is, de a teljes pontszámot csak akkor kapja meg mindkét esetben, ha leírja miért választotta az egyiket, vagy a másikat. Ha gondolt rá, hogy ezek elvileg különböznek. A numerikus adatokból látható, hogy a két megoldás csak néhány ezrelékben különbözik.
Ha nincs szövegesen leírva, hogy mit gondolt a megoldó, akkor le kell vonni a megoldására kapott pontból 2 pontot! (Pl. 20-2=18 pont)

2. $G = 900$ N, $\mu = 0{,}4$, $a = 0{,}6$ m

A doboz megmozdításának feltétele: $F \geq F_{t,\max} = \mu\cdot G = \underline{\underline{360\ \mathrm{N}}}$. **8 pont**

A doboz nem gyorsul, ha minimális az erő, így a forgatónyomatékok egyensúlyát felírhatjuk a talajjal érintkező, menetirány szerinti élre: $G\cdot\frac{a}{2} - F_{\min}\cdot h - F_{ny}\cdot x = 0$, ahol F_{ny} a talaj által kifejtett erő, és erőkarja az említett pontra $x \geq 0$. **8 pont**

Még éppen nem borul fel $x = 0$ esetében, így kapjuk, hogy

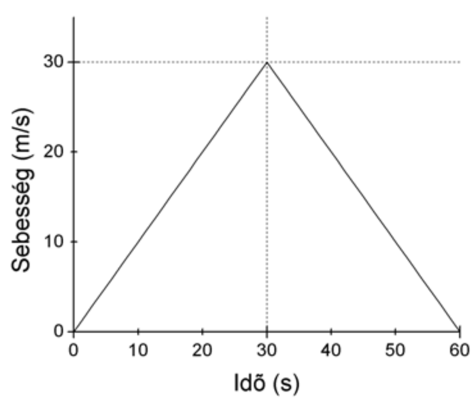
$$h_{max} = \frac{G \cdot a}{2 \cdot F_{min}} = \underline{\underline{0,75 \text{ m}}}.$$ **4 pont**

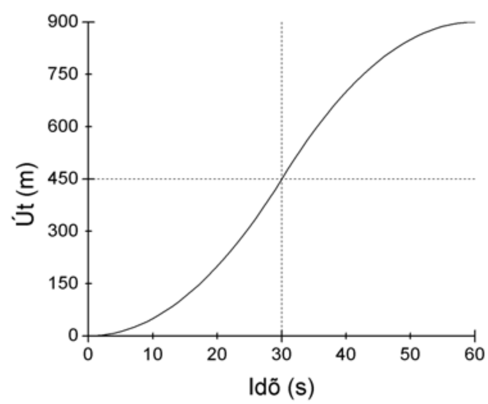
3. $a = 1$ m/s, $s = 900$ m

A mozgás első szakaszára: $\frac{s}{2} = \frac{1}{2} a \cdot t_1^{\,2}$, így $t_1 = \underline{\underline{30 \text{ s}}}$, és $v_{max} = a \cdot t_1 = \underline{\underline{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$. A második szakaszban lassul a jármű, könnyen belátható, hogy $t_2 = t_1$, hiszen $t_2 = \frac{v_{max}}{|a|} = 30$ s.

8 pont

Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás esetén a megtett út – idő függvény a gyorsulás előjelének megfelelő irányban álló parabola, a sebesség – idő függvény pedig egyenes, meredeksége a gyorsulásnak megfelelő. Így a grafikonok:





12 pont

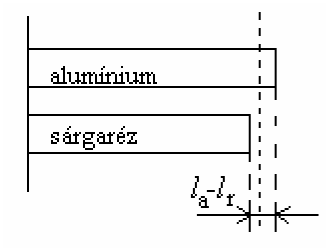
Megjegyzés: Talán a leggyakoribb hiba az lesz, hogy néhány fontos adat hiányzik a grafikonról: **elegendő**, ha mindkettőn fel van tüntetve a 30 és 60 s, és a 30 m/s, ill. a 450 és a 900 m. Ha fele van készen a grafikonoknak, akkor a fele pontszám jár. Ha minden tökéletes, de **az út-idő grafikon második szakasza nem jól illeszkedik az elsőhöz (pl. a másik irányba görbül), akkor 2 pontot vonjunk le.**

4. A=1 cm^2=10^{-4}m^2, l_0= 0,5 m, T_0= 0°C, T= 400°C, α_a= $2,39 \cdot 10^{-5} \frac{1}{{}^0C}$, α_r= $1,84 \cdot 10^{-5} \frac{1}{{}^0C}$,

E_a= 68,7 GPa, E_r= 122 GPa

Két lépésben vizsgáljuk a rudak változását:

Először határozzuk meg, ha szabadon tágulnának a rudak, akkor a magasabb hőmérsékleten mekkora lenne a hosszuk:



$$l_a = l_0\left(1+\alpha_a\left(T-T_0\right)\right)$$

$$l_r = l_0\left(1+\alpha_r\left(T-T_0\right)\right)$$ **3 pont**

Második lépésben az alumínium rudat nyomjuk össze, és a sárgaréz rudat nyújtsuk meg ugyanakkora erővel. A hosszváltozásuk:

$$\Delta l_a = \frac{1}{E_a}\frac{F}{A}l_a \qquad \text{és} \qquad \left|\Delta l_r\right| = \frac{1}{E_r}\frac{F}{A}l_r .$$ **3 pont**

Ahhoz, hogy a sík lapok alakváltozás nélkül párhuzamosan álljanak, szükséges az, hogy végül minden rúd azonos hosszúságú legyen. Ez akkor teljesül, ha

$$\Delta l_a + \left|\Delta l_r\right| = l_a - l_r .$$ **4 pont**

Amiatt, hogy két-két rúd van, minden rúdban azonos feszültség lesz, azonos feszítőerővel (a keresztmetszet változását elhanyagoljuk):

$$\frac{1}{E_a}\frac{F}{A}l_a + \frac{1}{E_r}\frac{F}{A}l_r = l_0\left(1+\alpha_a\left(T-T_0\right)\right) - l_0\left(1+\alpha_r\left(T-T_0\right)\right).$$

Innen:

$$\frac{F}{A} = \frac{\left(\alpha_a-\alpha_r\right)\left(T-T_0\right)}{\frac{1+\alpha_a(T-T_0)}{E_a}+\frac{1+\alpha_r(T-T_0)}{E_r}} = \underline{95{,}6\,\mathrm{MPa}} .$$ **5 pont**

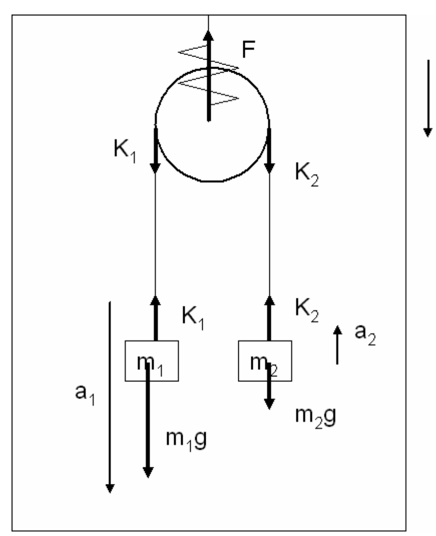
Az alumínium rúdban összehúzó, a rézben nyújtó erő ébred **2 pont**

melyek azonos nagyságúak: $\underline{\underline{F = 9{,}56\text{ kN}}}$. **3 pont**

5. $a = 0{,}2$ g , $m_1 + m_2 = M = 48$ kg, $a' = 0{,}3$ g ,

Feltehetjük, hogy $m_1 > m_2$. Ekkor az m_1 tömegű test a lifthez képest 0,3 g gyorsulással lefelé, azaz a Földhöz képest $a_1 = 0{,}3\,g + 0{,}2\,g = 0{,}5\,g$ gyorsulással lefelé mozog. Az m_2 tömegű test a lifthez képest 0,3 g gyorsulással felfelé, azaz a Földhöz képest $a_2 = 0{,}3\,g - 0{,}2\,g = 0{,}1\,g$ gyorsulással felfelé mozog.

4 pont



Az ábrán a Földhöz képesti gyorsulásokat és a testekre, valamint a csigára ható erőket tüntettük fel.

A csigának nincs tömege, tehát tehetetlenségi nyomatéka sincs, azaz a csiga bármely pontjára a forgatónyomatékok eredője 0.

A középpontra felírva:

$K_1 \cdot r = K_2 \cdot r \Rightarrow K_1 = K_2 = K$, ahol r a csiga sugara. **2 pont**

A dinamika alapegyenletét felírva a testekre:

$m_1 a_1 = m_1 g - K$, valamint $m_2 a_2 = K - m_2 g$. **4 pont**

A kötélerőt kifejezve:

$K = 0,5 \cdot m_1 g$ ill. $K = 1,1 \cdot m_2 g$, melyekből $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{11}{5}$.

Az össztömeg ismeretében

$m_1 = \dfrac{11}{11+5} \cdot (m_1 + m_2) = \underline{\underline{33\ \mathrm{kg}}}$ $m_2 = \dfrac{5}{11+5} \cdot (m_1 + m_2) = \underline{\underline{15\ \mathrm{kg}}}$ **6 pont**

A csiga tömege elhanyagolható, tehát a rá ható erők eredője 0, azaz

$F = 2K = 33\ \mathrm{kg} \cdot 9,81 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{323,7\ \mathrm{N}}}$ **4 pont**

A testek tömege: 33 kg és 15 kg, a rugós erőmérő 323,7 N-t mutat.

6. $\rho_1 = 1,1 \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $\rho_2 = 1 \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $r = 1\ \mathrm{mm}$, $d_1 = 3,5\ \mu\mathrm{m}$, $d_{\min} = 3\ \mu\mathrm{m}$, $p_0 = 10^5\ \mathrm{Pa}$

A lebegés feltétele, a térfogat számításánál nincs elhanyagolás, de a levegő tömegétől eltekintve: $\dfrac{4r^3\pi}{3}\rho_1 = \dfrac{4(r+d_0)^3\pi}{3}\rho_2$, ahonnan $d_0 = r\left(\sqrt[3]{\dfrac{\rho_1}{\rho_2}} - 1\right) = \underline{\underline{32,3\ \mu\mathrm{m}}}$.

Ha a levegőréteg térfogatát a megadottak szerint közelítjük, akkor:

$\dfrac{4r^3\pi}{3}\rho_1 = \left(\dfrac{4r^3\pi}{3} + 4r^2\pi d_0\right)\rho_2$, ahonnan $d_0 = \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}\dfrac{r}{3} = \underline{\underline{33,3\ \mu\mathrm{m}}}$.

Bármelyik megoldás teljes értékű. **8 pont**

A vékonyabb légréteggel körülvett inverz buborék átlagos sűrűsége a vízénél nagyobb így az süllyedni kezd. **2 pont**

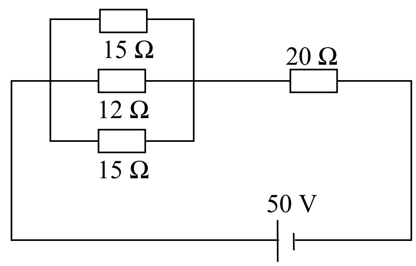
A légbuborék izotermikus változáson megy keresztül, a hidrosztatikus nyomás növekedésével a térfogat, így a falvastagság csökken: **4 pont**

$p_0 4 r^2 \pi d_1 = (p_0 + \rho_2 g h) 4 r^2 \pi d_{\min}$, **4 pont**

ahonnan adódik, hogy $h = \underline{\underline{1,70\ \mathrm{m}}}$. **2 pont**

7.

A kapcsoló zárásakor a kondenzátorok töltetlenek, vagyis a rajtuk eső feszültség zérus, azaz az áramkört helyettesíthetjük az alábbival (a kondenzátorok a 12 Ω-os ellenálláson folyó árammal töltődnek kezdetben):

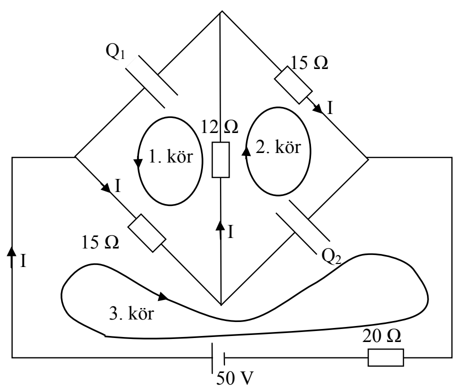


A körben az eredő ellenállás:

$$R = 20\Omega + \frac{1}{\frac{1}{15\Omega} + \frac{1}{12\Omega} + \frac{1}{15\Omega}} = 24{,}62\Omega,$$

ahonnan a főágban folyó áram erőssége: $I_0 = \frac{U}{R} = \underline{\underline{2{,}03\text{A}}}$. **8 pont**

A kapcsoló zárása után hosszú idővel a kondenzátorok feltöltődnek, és rajtuk már nem folyik át áram. Az áramkörre felírhatjuk a jelölt 3 körre a Kirchoff hurok törvényt:



$$I(15\Omega + 12\Omega) - \frac{Q_1}{10\mu\text{F}} = 0,$$

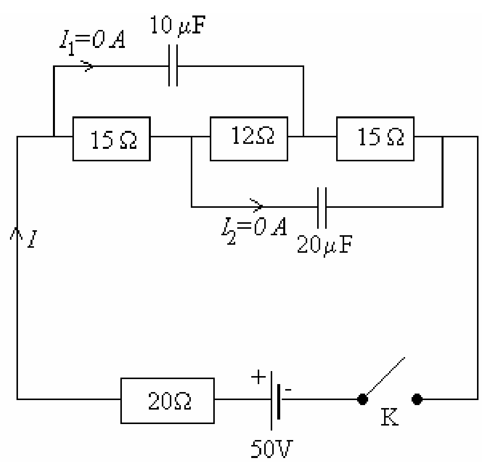
$$I(15\Omega + 12\Omega) - \frac{Q_2}{20\mu\text{F}} = 0, \text{ és}$$

$$I(15\Omega + 20\Omega) + \frac{Q_2}{20\mu\text{F}} = 50\text{ V}.$$

Innen adódik, hogy $I = \underline{\underline{0{,}806\text{ A}}}$, **6 pont**

$Q_1 = \underline{\underline{2{,}18 \cdot 10^{-4}\text{ C}}}$, és $Q_2 = \underline{\underline{4{,}35 \cdot 10^{-4}\text{ C}}}$. **6 pont**

A második esetben is átrajzolhatjuk a kapcsolást:



Az áramerősségre:

$$I = \frac{50\text{ V}}{20\Omega + 15\Omega + 12\Omega + 15\Omega} = \underline{\underline{0{,}806\text{ A}}}.$$

A kondenzátorok feszültsége egyenlő:

$$U_C = I \cdot (15\Omega + 12\Omega) = 21{,}8\text{ V},$$

amiből a kondenzátorok töltése számítható.

Numerikus eredmények ld. fönt.

8. T= 300 K, M_1= 28 g/mol, M_2= 115 g/mol, ν_2=

5 m/s, ρ_2= 7,31 g/cm^3, N_A=6·10^{23} 1/mol, R =8,31 J/K

További jelölések:

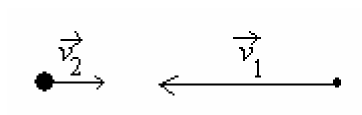
a nanorészecske tömege, sugara, atomjainak száma, ütközés utáni sebessége: m_2, r_2, N_2, u_2

a nitrogénmolekula tömege, ütközés előtti és ütközés utáni sebessége: m_1, v_1, u_1

Először határozzuk meg a nitrogénmolekula átlagos sebességének nagyságát:

$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_1\overline{v^2}$. Innen $v_{átl} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}} = 517\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = |v_1|$. **5 pont**

Tegyük fel, hogy egy pontosan átlagos sebességgel mozgó nitrogén molekula centrális, egyenes ütközést szenved egy nanorészecskével. Akkor lesz nagyobb a sebességváltozás, ha ez az ütközés ellentétes sebességgel rendelkező részek között jön létre. A sebességváltozást akarjuk meghatározni, akkor választhatjuk azt a megfigyelési rendszert, melyben ütközés előtt a nanorészecske állt, ebben a rendszerben a megfelelő sebességekre a $v_{1\text{rel}}$, $v_{2\text{rel}}$, $u_{1\text{rel}}$, $u_{2\text{rel}}$ jelöléseket használjuk. (A feladat megoldható laboratóriumhoz rögzített rendszerben is.)



Ekkor: $v_{1\text{rel}}= v_1-v_2$.

Az ütközés tökéletesen rugalmas, a részecskék szembe repülnek egymással, hanyagoljuk el az elektrosztatikus kölcsönhatást. A lendületmegmaradás törvényéből:

$$m_1 \cdot v_{1rel} = m_1 \cdot u_{1rel} + m_2 \cdot u_{2rel}$$

a mechanikai energia megmaradás törvényéből:

$$\frac{1}{2}m_{1rel}v_{1rel}^2 = \frac{1}{2}m_{1rel}u_{1rel}^2 + \frac{1}{2}m_{2rel}u_{2rel}^2 .$$

Innen:

$u_{2rel} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1rel}$. És $u_2 = u_{2rel} + v_2 = \frac{2m_1v_1 - (m_2-m_1)v_2}{m_1+m_2}$ **6 pont**

Megjegyzés: Valószínűleg sokan a függvénytáblázatból olvassák ki az ütközés utáni sebességeket. Valami írásbeli utalás szükséges arra nézve, hogy a diák fejében megfordult a rugalmas ütközést gondolata. Ennek hiányában **2 pontot vonjunk le**.

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor $|u_{2rel}| = 0,05v_2$. **2 pont**

Vagyis: $0,05v_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}|v_{1rel}|$, $0,05v_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}|v_1 - v_2|$,

Ahonnan a nanorészecske tömege:

$$\underline{\underline{m_2}} = 40 m_1 \frac{|v_1| + v_2}{v_2} - m_1 = 4175 m_1 = \underline{\underline{1{,}95 \cdot 10^{-19}\, g}}.$$ **4 pont**

Mivel

$\frac{4 r_2^3 \pi}{3} \rho_2 = m_2$, a részecske sugara $\underline{\underline{r_2}} = \sqrt[3]{\frac{3 m_2}{4 \pi \rho_2}} = \underline{\underline{1{,}85\ nm}}.$ **1 pont**

A nanorészecskét alkotó atomok számát megbecsülhetjük:

$$\underline{\underline{N_2}} \approx \frac{m_2}{M_2} N_A = \underline{\underline{1017}}.$$ **2 pont**

9. $E = 3 \cdot 10^{10}$ V/m, $T = 2{,}6$ fs, $q = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C , m = $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg

Elegendő $0 \le t_i \le \frac{T}{2}$ időtartamot vizsgálni, mert $\frac{T}{2} \le t_i \le T$ esetén ugyanaz játszódik le csak ellenkező irányban, és a jelenség T szerint periódikus.

A t_i időpontban bekövetkező ionizáció után az elektron a lézer terében gyorsul - mivel az ion Coulomb tere elhanyagolható – a gyorsulás nagysága: $a = \left|\frac{qE}{m}\right| = 5{,}276 \cdot 10^{21} \frac{m}{s^2}$

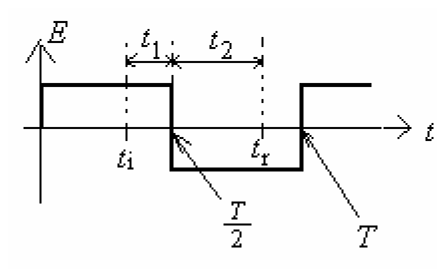
2 pont

1. szakasz: t_i időtől $T/2$ időig gyorsul $t_1 = \frac{T}{2} - t_i$ ideig

A sebesség $T/2$ időpontban: $v_1 = a \cdot \left(\frac{T}{2} - t_i\right)$

Az elektron elmozdulása: $x_1 = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{T}{2} - t_i\right)^2$ **1 pont**

2. szakasz: T/2 időpont után T időpontig az elektron az eddigivel ellentétes irányban gyorsul, a gyorsulás nagysága ugyanakkora: a.



<u>**1. eset:**</u> Amikor az elektron T idő előtt visszaérkezik, a visszatérés t_2 idejére $0 \le t_2 \le \frac{T}{2}$ teljesül.

Az elektron elmozdulása: $\Delta x_2(t) = v_1 t_2 - \frac{a}{2} t_2^2$. A visszatérés feltétele, hogy $x_1 + \Delta x_2 = 0$ legyen, azaz

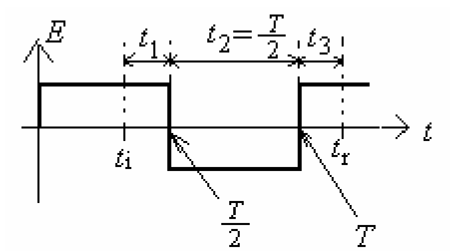
$$\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{T}{2}-t_i\right)^2+v_1t_2-\frac{a}{2}t_2^{\,2}=0\text{, melyből } t_2=\left(\frac{T}{2}-t_i\right)\left(1\pm\sqrt{2}\right).$$

Csak azon megoldásoknak van fizikai tartalma, melyre $0\le t_2\le\frac{T}{2}$, a negatív előjel esetén ez nem teljesül, tehát $t_2=\left(\frac{T}{2}-t_i\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$. **2 pont**

A $0\le t_2\le\frac{T}{2}$ egyenlőtlenségből kapjuk, hogy: $T\frac{2-\sqrt{2}}{2}\le t_i\le T\frac{1}{2}$ **2 pont**

Ekkor a visszatérési sebesség: $v_r=v_1-a\cdot t_2=a\cdot\left(\frac{T}{2}-t_i\right)\sqrt{2}$ **1 pont**

<u>2. eset:</u> A visszaérkezés *T* után következik be.



Ha az ionizációs idő nem teljesíti a $T\frac{2-\sqrt{2}}{2}\le t_i\le T\frac{1}{2}$ feltételt, akkor t = T időpontig nem tért vissza az elektron. Ekkor *T* időpontban

$$v_2=v_1-a\frac{T}{2}=-at_i,$$

$$x_2=x_1+v_1\frac{T}{2}-\frac{a}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2=\frac{a}{2}\left(\frac{T^2}{2}-2Tt_i+t_i^{\,2}\right)$$ **1 pont**

3. szakasz: *T* időpont után $\frac{3}{2}T$ időpontig az elektron gyorsulása ismét megfordul, a gyorsulás nagysága nem változik. Tegyük fel, hogy az elektron t_3 idő alatt tér vissza: $\Delta x_3=v_2t_3+\frac{a}{2}t_3^{\,2}$. A visszatérés feltétele: $x_2+\Delta x_3=0$ legyen, azaz

$$\frac{a}{2}\left(\frac{T^2}{2}-2Tt_i+t_i^{\,2}\right)+v_2t_3+\frac{a}{2}t_3^{\,2}=0\text{, melyből } t_3=t_i\pm\sqrt{2T\left(t_i-\frac{T}{4}\right)}$$ **2 pont**

Az egyenletnek akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nem negatív, azaz $\left(t_i-\frac{T}{4}\right)\ge 0\Rightarrow t_i\ge\frac{T}{4}$. **2 pont**

A t_3 lehetséges értékét vizsgáljuk meg grafikusan:

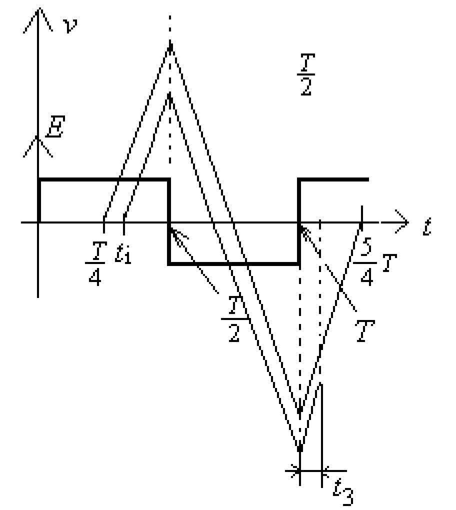
Ha t_i=*T*/4-el, akkor a t_3 is *T*/4-el egyenlő, és a grafikus képen látható, hogy a sebesség hogyan változik az idő függvényében. A visszatérés sebessége 0. Ha t_i kicsit nagyobb, akkor pozitív irányban az első szakaszon a görbe alatti terület kisebb, vagyis az eltávolodás kisebb, mint előbb, ezért visszafele is kevesebb utat kell megtennie. Ebből következik, hogy t_3<*T*/4, $t_3=t_i-\sqrt{2T\left(t_i-\frac{T}{4}\right)}$.

Ez azt jelenti, hogy az elektron $T\frac{1}{4} \le t_i \le T\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ionizációs idő esetén a T és $\frac{5}{4}T$ időpontok között tér vissza, a visszatérési sebesség:

$v_r = a(t_i - t_3) = a\sqrt{2T\left(t_i - \frac{T}{4}\right)}$ **2 pont**

A visszatérési idő: $t_r = T + t_3 = T + t_i - \sqrt{2T(t_i - \frac{T}{4})}$.

Ha az elektron a (0, T/4) között szakad ki, akkor nem tér vissza az ionhoz későbbi periódusokban sem.



Összefoglalva az eddig elmondottakat:

Akkor térhet vissza az elektron az ionhoz, ha az ionizációs idő $\frac{T}{4} \le t_i \le \frac{T}{2}$.

Ha $\frac{T}{4} \le t_i \le T\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, akkor az elektron T és $\frac{5}{4}T$ időpontok között fog visszatérni, ekkor a visszatérési sebesség: $v_r = a\sqrt{2T\left(t_i - \frac{T}{4}\right)}$.

Ha $T\frac{2-\sqrt{2}}{2} \le t_i \le \frac{T}{2}$, akkor az elektron $\frac{T}{2}$ és T időpontok között fog visszatérni, ekkor a visszatérési sebesség $v_r = a\sqrt{2}\left(\frac{T}{2} - t_i\right)$.

Az ionizációs idő függvényében vizsgálva a visszatérési sebességet, azt tapasztaljuk, hogy a függvény $T\frac{1}{4} \le t_i \le T\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ szakaszon monoton növekvő, a $T\frac{2-\sqrt{2}}{2} \le t_i \le T\frac{1}{2}$ szakaszon monoton csökkenő, tehát a maximum $t_i = T\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ időpillanatban van. **2 pont**

A maximális visszatérési sebesség: $v_m = aT\frac{2-\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{4{,}02 \cdot 10^6 \frac{m}{s}}}$. Ez a sebesség még lényegesen kisebb, mint a vákuumbeli fénysebesség, tehát helytálló a nemrelativisztikus közelítés.

A visszatérő elektron maximális mozgási energiája $\frac{1}{2}mv_m^2 = \underline{\underline{7{,}35 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}}}$ **3 pont**

A feladat egy elvontabb megoldása olvasható a következőkben. Vigyázat itt más a pozitív irány is és további különbség is van a jelölésekben.

Elegendő $0 \le t_i \le \frac{T}{2}$ időtartamot vizsgálni, mert $\frac{T}{2} \le t_i \le T$ esetén ugyanaz játszódik le csak ellenkező irányban, és a jelenség T szerint periodikus.

A t_i időpontban bekövetkező ionizáció után $T/2$ időpontig az elektron a lézer terében gyorsul - mivel az ion Coulomb tere elhanyagolható – a gyorsulás:

$a = \frac{qE}{m} = -5,276 \cdot 10^{21} \frac{m}{s^2}$ (A negatív előjel azt jelenti, hogy az elektromos térrel ellentétes irányban gyorsul az elektron.)

A sebesség $T/2$ időpontban: $v\left(\frac{T}{2}\right) = a \cdot \left(\frac{T}{2} - t_i\right) = \frac{qE}{m} \cdot \left(\frac{T}{2} - t_i\right)$

Az elektron elmozdulása: $x\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{T}{2} - t_i\right)^2 = \frac{qE}{2m} \cdot \left(\frac{T}{2} - t_i\right)^2$

$T/2$ időpont után T időpontig az elektron az eddigivel ellentétes, azaz pozitív irányban gyorsul, a gyorsulás nagysága ugyanakkora. Ha $\frac{\mathrm{T}}{2} \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}$

$$v(t) = v\left(\frac{T}{2}\right) + (-a) \cdot \left(t - \frac{T}{2}\right) = \frac{qE}{m} \cdot \left(\frac{T}{2} - t_i\right) - \frac{qE}{m}\left(t - \frac{T}{2}\right) = -\frac{qE}{m}(t + t_i - T)$$

$$x(t) = x\left(\frac{T}{2}\right) + v\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{-a}{2} \cdot \left(t - \frac{T}{2}\right)^2 = \frac{qE}{2m} \cdot \left(\frac{T}{2} - t_i\right)^2 + \frac{qE}{m} \cdot \left(\frac{T}{2} - t_i\right) \cdot \left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{qE}{2m} \cdot \left(t - \frac{T}{2}\right)^2$$

$$x(t) = -\frac{qE}{2m}\left(\left(t - \frac{T}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{T}{2} - t_i\right) \cdot \left(t - \frac{T}{2}\right) - \left(\frac{T}{2} - t_i\right)^2\right)$$

Az elektron az ionhoz $t = t_r$ időpontban tér vissza, melyre $x(t_r) = 0$ teljesül, az egyenletet $\left(t_r - \frac{T}{2}\right)$ -re , mint ismeretlenre megoldva:

$t_r - \frac{T}{2} = \left(\frac{T}{2} - t_i\right) \pm \sqrt{\left(\frac{T}{2} - t_i\right)^2 + \left(\frac{T}{2} - t_i\right)^2} = \left(\frac{T}{2} - t_i\right)\left(1 \pm \sqrt{2}\right)$ Csak azon megoldásoknak van fizikai tartalma, melyre $\frac{T}{2} \le t_r \le T$, a negatív előjel esetén $t_r < T/2$ teljesülne, ami nem lehetséges, tehát $\underline{\underline{t_r = T + T\frac{\sqrt{2}}{2} - t_i\left(1 + \sqrt{2}\right)}}$. Az egyenlőtlenséget t_i-re megoldva kapjuk:

$$T\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \le t_i \le T\frac{1}{2}$$

Ilyen ionizációs idők esetén fog az elektron $\frac{T}{2} \le t \le T$ szakaszon visszatérni az ionhoz.

Ekkor a visszatérési sebesség: $v(t_r) = -\frac{qE}{m}(t_r + t_i - T) = -\frac{qE}{m}\left(T\frac{\sqrt{2}}{2} - t_i\sqrt{2}\right)$

Ha az ionizációs idő nem teljesíti a $T\frac{2-\sqrt{2}}{2} \le t_i \le T\frac{1}{2}$ feltételt, akkor $t = T$ időpontig nem tért vissza az elektron. $v(T) = -\frac{qE}{m}t_i$

$$x(T) = -\frac{qE}{2m}\left(\left(\frac{T}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{T}{2} - t_i\right)\cdot\frac{T}{2} - \left(\frac{T}{2} - t_i\right)^2\right) = -\frac{qE}{2m}\left(-\frac{T^2}{2} + 2Tt_i - t_i^2\right)$$

Az elektron $T \le t \le \frac{3}{2}T$ időpontok között negatív irányban gyorsul, a gyorsulás nagysága ugyanakkora. Ekkor:

$$v(t) = v(T) + a\cdot(t-T) = -\frac{qE}{m}t_i + \frac{qE}{m}(t-T)$$

$$x(t) = x(T) + v(T)\cdot(t-T) + \frac{a}{2}\cdot(t-T)^2 = -\frac{qE}{2m}\left(-\frac{T^2}{2} + 2Tt_i - t_i^2\right) - \frac{qE}{m}t_i(t-T) + \frac{qE}{2m}(t-T)^2$$

$$x(t) = \frac{qE}{2m}\left(\frac{T^2}{2} - 2Tt_i + t_i^2 - 2t_i(t-T) + (t-T)^2\right)$$

Az elektron az ionhoz $t = t_r$ időpontban tér vissza, melyre $x(t_r) = 0$ teljesül. Az egyenletet $(t_r - T)$ -re , mint ismeretlenre megoldva:

$t_r - T = t_i \pm \sqrt{t_i^2 - \frac{T^2}{2} + 2Tt_i - t_i^2} = t_i \pm \sqrt{2T\left(t_i - \frac{T}{4}\right)}$ az egyenletnek akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nem negatív azaz $\left(t_i - \frac{T}{4}\right) \ge 0 \Rightarrow t_i \ge \frac{T}{4}$.

A lehetséges $T\frac{1}{4} \le t_i \le T\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ értékeknél a negatív előjellel számolt t_r mindig teljesíti a $T \le t_r \le \frac{3}{2}T$ feltételt és mindig kisebb, mint a pozitív előjellel számolt t_r. Ez azt jelenti, hogy az elektron $T\frac{1}{4} \le t_i \le T\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ionizációs idő esetén a $T \le t \le \frac{3}{2}T$ időpontok között tér vissza, a visszatérési idő: $t_r = T + t_i - \sqrt{2T\left(t_i - \frac{T}{4}\right)}$ a visszatérési sebesség:

$$v(t_r) = -\frac{qE}{m}t_i + \frac{qE}{m}\left(t_i - \sqrt{2T\left(t_i - \frac{T}{4}\right)}\right) = -\frac{qE}{m}\sqrt{2T\left(t_i - \frac{T}{4}\right)}$$

Ha az elektron eddig nem tért vissza az ionhoz, akkor ezután sem tér vissza, mert ekkor teljes periódus alatti elmozdulás negatív és a képletek ugyanúgy igazak csak ezen elmozdulást kell hozzáadni.

Összefoglalva az eddig elmondottakat:

Akkor térhet vissza az elektron az ionhoz, ha $\frac{T}{4} \le t_i \le \frac{T}{2}$.

Ha $T\frac{1}{4} \le t_i \le T\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, akkor a visszatérés $T \le t \le \frac{3}{2}T$ időpontok között fog bekövetkezni, ekkor a visszatérési sebesség $v(t_r) = -\frac{qE}{m}\sqrt{2T\left(t_i - \frac{T}{4}\right)}$.

Ha $T\frac{2-\sqrt{2}}{2} \le t_i \le T\frac{1}{2}$, akkor a visszatérés $\frac{T}{2} \le t \le T$ időpontok között fog bekövetkezni, ekkor a visszatérési sebesség $v(t_r) = -\frac{qE}{m}\sqrt{2}\left(\frac{T}{2} - t_i\right)$.

Az ionizációs idő függvényében vizsgálva a visszatérési sebességet, azt tapasztaljuk, hogy a függvény $T\frac{1}{4} \le t_i \le T\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ szakaszon monoton növekvő, a $T\frac{2-\sqrt{2}}{2} \le t_i \le T\frac{1}{2}$ szakaszon monoton csökkenő, tehát a maximum $t_i = T\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ esetén van. A maximális visszatérési sebesség: $v_m = -\frac{qET}{m}\frac{2-\sqrt{2}}{2} = 4{,}017 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$ Ez a sebesség még lényegesen kisebb, mint a vákuumbeli fénysebesség, tehát a nemrelativisztikus közelítés helytálló.

A visszatérő elektron maximális mozgási energiája $\frac{1}{2}m{v_m}^2 = 7{,}35 \cdot 10^{-18} J$.