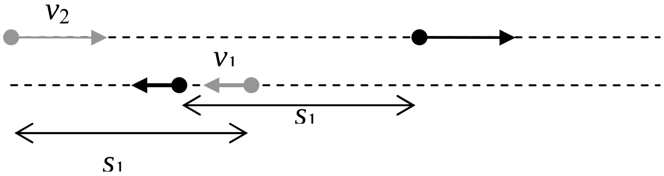
Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny
2004. január 22.
MEGOLDÁSOK

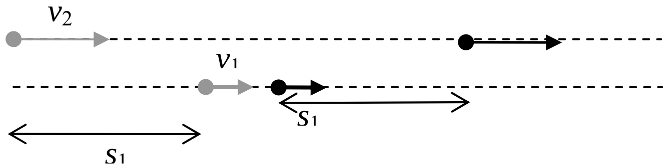
1.
Adatik: v_1 = 80 km/h, t = 0,5 h, $s_1 = s_2$ = 45 km,
v_2 = ?

a) A vonatok szembe jönnek:



$$2\,s_1 = v_2 t + v_1\,t \;\Rightarrow\; v_2 = \frac{2s_1}{t} - v_1 = \frac{2\cdot 45\,\text{km}}{0{,}5\,\text{h}} - 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{100\ \text{km/h}}}.$$ *15 pont*

b) A vonatok egy irányban haladnak:



$$2\,s_1 = v_2 t - v_1\,t \;\Rightarrow\; v_2 = \frac{2s_1}{t} + v_1 = \frac{2\cdot 45\,\text{km}}{0{,}5\,\text{h}} + 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{260\ \text{km/h}}}.$$ *5 pont*

Magyarországon valószínűleg nincs ilyen sebességű vonat, de Európában számos országban létezik.

2.
Adatok: h_1= 0,1 m, ρ_1= 1 g/cm^3, ρ_3= 0,8 g/cm^3,
a) ρ_2= 1,2 g/cm^3, b) ρ_2= 1,6 g/cm^3, Mi lesz az egyensúlyi helyzet?

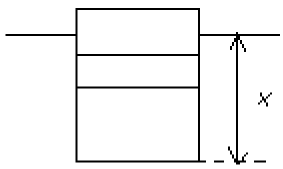
Mivel a korongok keresztmetszete és tömege is azonos:

$$r^2\pi\cdot h_i\cdot\rho_i = m = r^2\cdot\pi\cdot h_1\cdot\rho_1$$

Igy h_3= h_1/0,8, és az a) esetben h_2= h_1/1,2, míg a b) esetben h_2= h_1/1,6.
Mivel ρ_1= $\rho_{víz}$ - ha egyedül lenne legfelső korong a rúdon, akkor lebegne a vízben. A 3-as korong egyedül úszna a vízen.
Nézzük meg, hogy ha a középső test sűrűségét tetszés szerint változtathatnánk, akkor milyen ρ esetében lebegne a három korong együttese.

$$3mg = \frac{m}{\rho_1}\rho_{víz}g + \frac{m}{\rho}\rho_{víz}g + \frac{m}{\rho_3}\rho_{víz}g\text{, innen}\qquad \rho = \frac{\rho_{víz}\rho_3}{2\rho_3 - \rho_{víz}} = \frac{4}{3}.$$

a) esetben $\rho_2 < \frac{4}{3}$. Ebből következik, hogy úszni fog a három korong együttese.



Határozzuk meg, hogy milyen mélyen süllyed be a három korong:
$3mg = r^2\pi x\rho_{víz}g = \frac{m}{h}xg$, innen: x=3h. A korongok teljes magassága:

$$h + \frac{h}{1{,}2} + \frac{h}{0{,}8} = 3{,}08\cdot h.$$ Vagyis a magasságuk 98,3 %-ig elmerülnek a vízbe.

Indoklás nélkül 2 pont. *10 pont*

b) esetben $\rho_2 > \frac{4}{3}$, ezért más lesz az egyensúlyi helyzet.

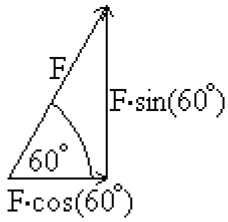
Mivel $2mg \rangle \left(r^2\pi \frac{h}{1{,}6} + r^2\pi \frac{h}{0{,}8} \right) \rho_{víz}\, g = 1{,}875m$, az alsó két korong lesüllyed az edény aljára.

A legfelső korong lebegni fog a vízben, természetesen esetleg le is süllyedhet egészen a másik két korong tetejéig. Indoklás nélkül 2 pont. *10 pont*

3.

Adatok: F= 90kN, a_f= 0, α= 60°

m=? a_v=?



A repülőre ható F erőt az ábra szerint felbontjuk vízszintes és függőleges komponensekre. *5 pont*

Ezen kívül a repülőre még hat a súlyerő, melynek hatásvonala függőleges, és lefele mutat.

Irjuk fel a mozgásegyenlet vízszintes és függőleges komponens-egyenleteit:

$F \cdot \cos 60° = m \cdot a_v$,

$F \cdot \sin 60° - m \cdot g = m \cdot a_f = 0$. *9 pont*

Innen: $m = 7{,}794 \; 10^3$ kg, *3 pont*

$a_v = 5{,}66$ m/s^2. *3 pont*

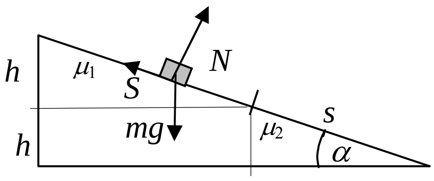
4.

Adatok: $\mu_1 = 0{,}3$, $\mu_2 = 0{,}4$, $v(0) = 0$, $v(s) = v$, $v(2s) = 0$.

$\alpha = ?$

$h = s \cdot \sin \alpha$, $S_1 = \mu_1 N$, $S_2 = \mu_2 N$, $N = mg \cos \alpha$. *5 pont*

Írjuk fel a munkatételt a felső és az alsó szakaszra:



$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + S_1 \cdot s\,,$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = S_2 \cdot s\,.$$ *10 pont*

A két egyenletet adjuk össze, és írjuk be h, S_1, S_2 és N kifejezését:

$$2mg\sin\alpha = (\mu_1 + \mu_2)mg\cos\alpha\,,$$

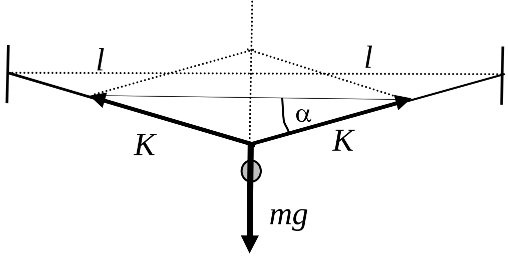
innen $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = 0{,}35$, azaz $\alpha = 19{,}29°$ *5 pont*

5. $\alpha = 30°$, ha a gyorsulás g,

$\alpha' = 35°$, ha a gyorsulás $g' = g + a$.

$a = ?$

——



A lógó test egyensúlyban van, tehát

$mg = 2K \sin \alpha$,

$mg' = 2K' \sin \alpha'$, *10 pont*

ahol K, illetve K' a gumiszálban ébredő erő. A gumiszál rugalmas, tehát a benne ébredő K erő arányos a Δl megnyúlással: $K = D\,\Delta l$, és a vesszős esetre hasonlóan.

A gumiszál megnyúlása $\Delta l = \dfrac{l}{\cos\alpha} - l = l(\dfrac{1}{\cos\alpha} - 1)$. *5 pont*

A két egyenletet elosztva egymással és behelyettesítve Δl-t, kapjuk

$$\frac{g'}{g} = \frac{\Delta l' \cdot \sin\alpha'}{\Delta l \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\frac{\dfrac{1}{\cos\alpha'} - 1}{\dfrac{1}{\cos\alpha} - 1} = \frac{\mathrm{tg}\alpha' - \sin\alpha'}{\mathrm{tg}\alpha - \sin\alpha} = \underline{\underline{1{,}35}}.$$

Tehát a lift gyorsulása $a = g' - g = 0{,}35g = 3{,}43\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. *5 pont*

A lift ekkora gyorsulással indul pl. fölfelé, vagy ekkora lassulással halad lefelé.

6.

Adatok: A= 452 km^2= 4,52·10^8 m^2, d= 0,08 m, η= 0,9, α= 60°, S= 1 kW/m^2, ρ= 900 kg/m^3, L_o= 3,34·10^5 J/kg

t= ?, Q = ?

A teljes olvadáshoz szükséges hő:

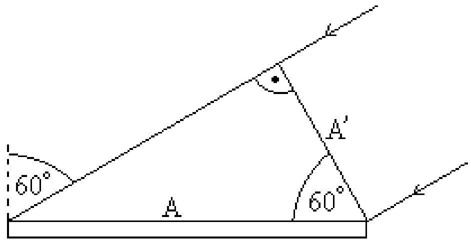
$\underline{\underline{Q}}$= $L_o m_{jég}$= $L_o \rho \cdot A \cdot d$ = $\underline{\underline{1{,}09 \cdot 10^{16}\ \mathrm{J}}}$, míg $V_{\mathrm{jég}}$= 3,616·10^7 m^3, $m_{\mathrm{jég}}$= 3,25·10^{10} kg. *10 pont*

A jégfelületre érkező sugárzási energia meghatározható az ábra segítségével:

Az A' keresztmetszeten belépő sugárzás 10 %-a lesz az, amely a jeget megolvasztja. *2 pont*

A'= A·cos 60°=A/2 *2 pont*

Q= $Q_{hasznos}$= $(1-\eta) \cdot S \cdot A' \cdot t$,. *4 pont*



Innen: $\underline{\underline{t}} = \dfrac{Q}{(1-\eta)S\dfrac{A}{2}}$ = $\underline{\underline{482300\ \mathrm{s} = 134\ \mathrm{h}.}}$ *2 pont*

Megjegyzés: Ha átlagosan napi 8 órás napsütéses órával számolunk, akkor ez kb. 17 nap. (A becslésnél nem vettük figyelembe, hogy Nap sugárzásának iránya is változik a 8 óra alatt.)

7.

Adatok: V= 1 m^3, T_1= 20 °C= 293 K, n_{CO}= 0,2 mol, n_{lev}= 5 mol, L= 280 $\dfrac{kJ}{mol}$.

Keressük a p_1 kezdeti nyomást, továbbá a p_2 végső nyomást a) esetben a fal hőszigetelő, b) esetben a fal hővezető!

a) Kezdetben volt: n_1= 5 mol + 0,2 mol = $\underline{5{,}2\ \mathrm{mol}}$

A kezdeti nyomás:

$$p_1 = n_1 R T_1 = \underline{\underline{1{,}27 \cdot 10^4\ Pa}}\ .$$ *5 pont*

A reakció miatt megváltozhat az anyagmennyiség. Ezt kell először megvizsgálnunk:

$2\,CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$ a reakciót leíró egyenlet, így 0,2 mol CO és 0,1 mol O_2-ből 0,2 mol CO_2 lesz.

Végül lett: n_2= (5-0,1)mol + 0,2 mol = $\underline{5{,}1\ \mathrm{mol}}$. *2 pont*

A rendszerben előforduló gázmolekulák mindannyian f= 5 szabadsági fokúak, ha merev súlyzómodellt alkalmazunk. A szénmonoxid és az oxigén, nitrogén kétatomosak, a háromatomos széndioxid pedig lineáris molekula. Az ideális gázmodellben ezt szokás tanítani, azonban a széndioxid mért fajhőjéből megállapítható, hogy ez a modell szobahőmérsékleten nem pontosan írja le ezt a gázt. A javításkor elfogadtuk a 6 szabadsági fokot is (mivel többatomos gáz). Továbbá örömmel vettük, hogy voltak, akik nem bízták erre az egyszerű modellre magukat, hanem a táblázatban szereplő fajhőt használták fel a számításaiknál.

A hőszigetelő fal miatt kívülről nem juthat hő az edénybe, és feltételezzük, hogy az edény fala merev is, így munkát sem végezhetünk a gázkeveréken.

Az energiamegmaradás elvét alkalmazva:

$E_1 + Q_{reakció} = E_2$, $\frac{f}{2}n_1RT_1 + 0{,}2mol \cdot L = \frac{f}{2}n_2RT_2$. Innen: T_2= $\underline{827\text{ K}}$ = 554 °C. *8 pont*

$$p_2 = n_2RT_2 = \underline{\underline{3{,}51 \cdot 10^4\,Pa}}.$$ *2 pont*

A feladat szövege a felszabaduló hőnek, ilyen értelmezését sugallta.

Aki a reakcióhő szokásos, „izotermikus” körülmények közötti mérését vette alapul, és úgy gondolkodott, hogy a végterméktől a kiindulási hőmérséklet eléréséig elvonható hő a keletkezett hő, ezt is elfogadtuk helyes megoldásnak.

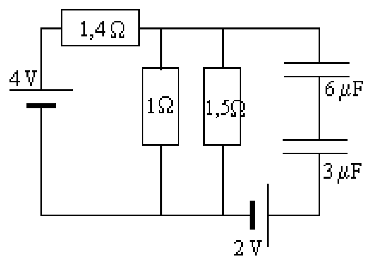
b) A fal jó hővezető:

Ebben az esetben feltételezhetjük, hogy a végső hőmérséklet meg fog egyezni a kiindulásival.

$$p_2 = n_2RT_1 = \underline{\underline{1{,}24 \cdot 10^4\,Pa}}.$$ *3 pont*

8.

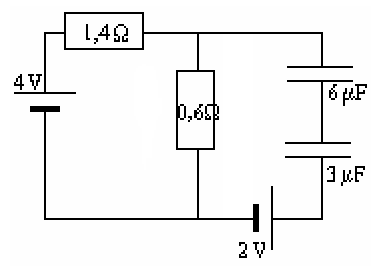
U_1=4V; U_2=2V; R_1=1,4Ω; R_2=1Ω; R_3=1,5Ω; C_1=3μF; C_2=6μF



A kapcsolási rajz egyszerűsíthető. Az 1 Ω és a 1,5 Ω ellenállások párhuzamosan vannak kötve, így az eredőjükkel helyettesíthetők. *1 pont*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1{,}5\Omega} = \frac{5}{3\Omega} \longrightarrow R = 0{,}6\Omega$$

2 pont



A kondenzátorokon nem folyik áram. A kapcsolásban a kondenzátorok ága lényegében szakadásnak tekinthető. Ekkor R_1 és R ellenállások egymással sorba vannak kötve. A telep feszültsége az ellenállásokkal egyenes arányban oszlik meg. *1 pont*

Az R ellenállásra eső feszültség:

$$U_R = \frac{R}{R + R_1} \cdot U_1 = \frac{0{,}6}{0{,}6 + 1{,}4} \cdot 4V = 1{,}2V$$ *2 pont*

A kondenzátorokra eső feszültség: U=U_2-U_R=2V-1,2V=0,8V *4 pont*

(Megjegyzés: Kirchhoff-törvényekkel is megkapható ugyanez az eredmény.)

A kondenzátorok eredő kapacitása:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}\mu F = 2\mu F$$ *2 pont*

A kondenzátorok fegyverzetein felhalmozódó töltés:

$$Q = CU = 2 \cdot 10^{-6} F \cdot 0{,}8V = 1{,}6 \cdot 10^{-6} C$$ *4 pont*

A kérdéses energia:

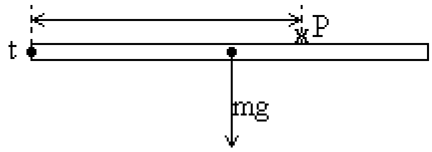
$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-6} C)^2}{3 \cdot 10^{-6} F} = \underline{0{,}4266 \cdot 10^{-6}\ \text{J}}.$$ *4 pont*

(Megjegyzés: A kondenzátorokra eső feszültségből több úton lehet számolni a kérdéses energiát. Kihasználhatjuk, hogy a kondenzátorokra eső feszültség a kapacitásokkal fordított arányban oszlik meg, vagy az összenergia kiszámolása után kihasználhatjuk, hogy az energia is a kapacitással fordított arányban oszlik meg.

9.

Legyen a pénzérme tömege m_0, a rúdé m ($m>>m_0$), a rúd hossza l= 1 m. A rúdnak a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{3} ml^2$. Továbbá: $\alpha = 10°$.

a) Először határozzuk meg azt, hogy az elengedés pillanatában melyik érmék vállnak el a rúdtól! A rúd forgómozgást végez, melyet a pénzérmék gyakorlatilag nem befolyásolnak. Határozzuk meg a tengelytől mért x távolság függvényében a P pont (a rúd pontja) $a(x)$ gyorsulását. Ahol az elengedés pillanatában már $a(x) > g$, attól az x-től nagyobb távolságra lévő pénzérmék elválnak a rúdtól a kezdeti pillanatban és szabadon esnek. A pénzérmék nem mozdulhatnak g-nél nagyobb gyorsulással lefelé, hiszen nincsenek a rúdhoz rögzítve. A rúd elfordulásával csökken a súlyerő forgatónyomatéka, ezzel csökken a szöggyorsulás is. Ezért később újabb érmék már nem válhatnak el ilyen okból a rúdtól.



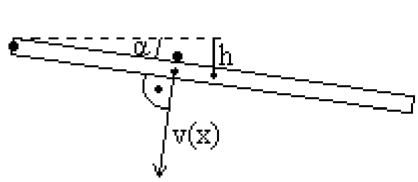
Felírjuk a forgómozgás egyenletét:

$M = \Theta \cdot \beta$ és $M = m \cdot g \cdot \frac{l}{2}$. Innen: $\beta = \frac{3g}{2l}$.

Számítsuk ki azt az x_0 távolságot, ahol $a(x_0) = g$:

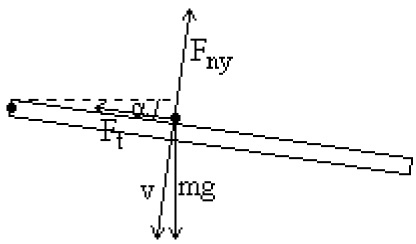
$a(x_0) = \beta \cdot x_0$. Innen: $\underline{\underline{x_0 = \frac{2}{3} l}}$. Azaz a tengelytől 66 cm-nél távolabb lévő pénzérmék elvállnak a rúdtól, a rúd pedig a többi érmével együtt β szöggyorsulással forogni kezd. *10 pont*

b) Amikor a rúd a kezdeti helyzethez képest elfordul α szöggel, akkor a pénzérmék egy része meg is csúszhat. Kérdés, hogy milyen x_1-nél lesz a megcsúszás határa a fenti szögnél! Az energia megmaradás tételének felhasználásával meghatározhatjuk $v(x)$-et.



$$\frac{1}{2} \Theta \omega^2 = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \frac{l}{2} \sin \alpha, \text{ és } v(x) = \omega \cdot x = x \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{l}}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen erők hatnak az x távolságban lévő pénzérmére. Tételezzük fel, hogy az a rúddal együtt mozogva végez körmozgást. Irjuk fel a mozgásegyenlet rúdra merőleges, és a rúddal párhuzamos komponensegyenletét:



$-F_{ny} + m_0 g \cos \alpha = \beta_2 x m_0$, mivel $a_t = \beta_2 x$

$$F_t - m_0 g \sin\alpha = m_0 \frac{v^2}{x}.$$

A rúdra vonatkozó mozgásegyenletből meghatározható a pillanatnyi szöggyorsulás:

$$\beta_2 \Theta = mg \frac{l}{2} \cos\alpha.$$

A két egyenletből kifejezve a nyomóerőt és a tapadási erőt, alkalmazhatjuk az $F_t \le \mu_0 F_{ny}$ feltételt.

$$F_t = m_0 g \sin\alpha \left(\frac{3x}{l} + 1 \right), \qquad F_{ny} = m_0 g \cos\alpha \left(1 - \frac{3x}{2l} \right).$$ Innen:

$$x \le \frac{\mu_0 \cos\alpha - \sin\alpha}{\frac{3}{l}\left(\sin\alpha + \frac{\mu_0 \cos\alpha}{2} \right)} = \underline{\underline{25{,}3 cm.}}$$

Amikor a rúd ebben a helyzetben van, akkor mindössze három pénzérme lesz a rúdhoz képest eredeti helyén: a tengelypontban, a 10 és 20 cm-es osztásnál lévő. *10 pont*

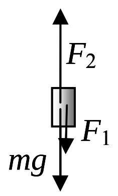
10.

Adatok: l =1,3 m, m_1 = 30 g = $3 \cdot 10^{-2}$ kg, m_1 = 60 g = $6 \cdot 10^{-2}$ kg, m = 10 g = 10^{-2} kg,

Q = 10 μC = 10^{-5} C, d = 10 cm = 0,1 m, $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $k = 9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$.

q = ?, K_1 = ?, K_2 = ?

a) A q töltés meghatározásához a gyűrűre ható erők egyensúlyát kell fölírni:
Legyen először a rögzített testek töltése azonos előjelű, mondjuk pozitív.



$$F_1 = k\frac{qQ}{(l-d)^2}, \quad F_2 = k\frac{qQ}{d^2},$$

$$F_1 + mg = F_2,$$

$$k\frac{qQ}{(l-d)^2} + mg = k\frac{qQ}{d^2} \Rightarrow q = \frac{mg}{kQ}\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(l-d)^2} \right)^{-1}$$

Mivel $(l-d)^2 >> d^2$ a számadatok szerint, az eredmény jó közelítéssel:

$$q \approx \frac{mg}{kQ} d^2 = \frac{10^{-2}\mathrm{kg} \cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10^{-2}\mathrm{m}^2}{9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} = \underline{\underline{1{,}1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}}.$$ *5 pont*

Megjegyzés: ha nem használunk közelítést, és g = 9,81 m/s^2-tel számolunk, az eredmény $1{,}09 \cdot 10^{-8}$ C.

Ha a rögzített testek negatív töltéssel rendelkeznek, az egyensúly feltétele: $F_2 + mg = F_1$
Mivel azonban $F_2 >> F_1$, a gyűrű nem lehet egyensúlyi helyzetben. *2 pont*

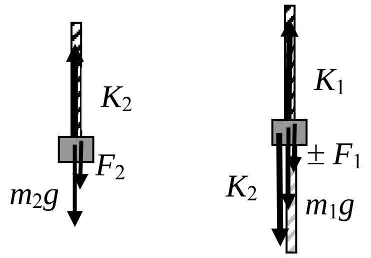
A rögzített testek töltése ellentétes előjelű is lehet. Figyelembe véve a Coulomb-erők nagyságrendjét, csak az lehetséges, hogy az alsó test töltése pozitív, a felsőé negatív.
$mg = F_1 + F_2 \approx F_2$. Ebből ugyancsak $q = 1{,}1 \cdot 10^{-8}$ C adódik. *3 pont*

b) A kötélben ébredő erők számításához előbb határozzuk meg a többi erő nagyságát:
mg = 0,1 N, $m_1 g$ = 0,3 N, $m_2 g$ = 0,6 N,

$$F_1 = \frac{kqQ}{(l-d)^2} = \frac{9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\cdot 1{,}1\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}\cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}}{1{,}2^2\,\mathrm{m}^2} = 6{,}9\cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}$$, elhanyagolható. $F_2 = k\frac{qQ}{d^2} \approx mg$= 0,1 N.

Van még egy Coulomb erő a rögzített töltések között is, ez azonban sokkal kisebb a többi erőnél:

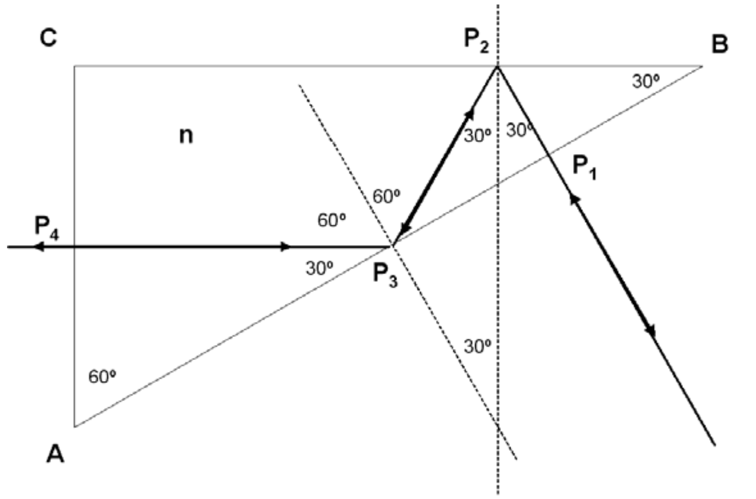
$$F_1 = \frac{kq^2}{l^2} = \frac{9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\cdot 1{,}1^2\cdot 10^{-16}\,\mathrm{C}^2}{1{,}3^2\,\mathrm{m}^2} = 6{,}45\cdot 10^{-7}\ \mathrm{N}$$, elhanyagolható.



Az alsó test egyensúlyának feltétele:
$K_2 = m_2g + F_2 = 0{,}6\ \mathrm{N} + 0{,}1\ \mathrm{N} = \underline{\underline{0{,}7\ \mathrm{N}}}$. *5 pont*

A felső test egyensúlyának feltétele:
$K_1 = m_1g \pm F_1 + K_2 \approx m_1g + K_2$
$K_1 = 0{,}3\ \mathrm{N} + 0{,}7\ \mathrm{N} = \underline{\underline{1\ \mathrm{N}}}$. *5 pont*

11. feladat
Adat: n=2,1



Számoljuk ki az üvegből való kilépéskor a teljes visszaverődés határszöge:

$$\sin\alpha_h = \frac{1}{n} = 0{,}4762 \qquad \alpha_h = 28{,}44°$$ *(5 pont)*

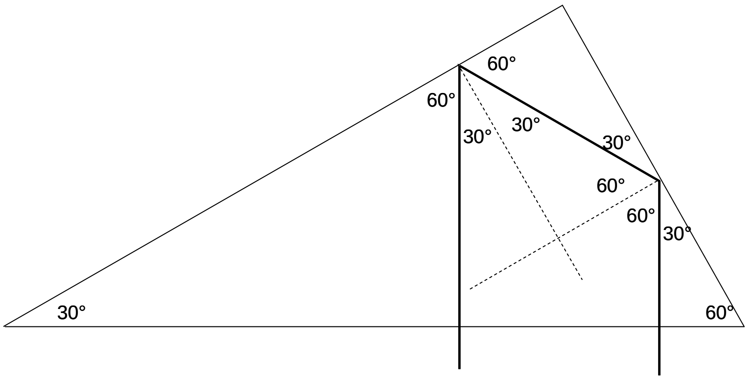
1. eset: Az AB szakasz felezőpontja és a B pont között érkezik a fénynyaláb.

A fény a P_1 pontban részben visszaverődik, részben irányváltozás nélkül továbbhalad (merőleges beesés). P_2 pontban a beesési szög 30º (ld. ábra) nagyobb, mint a határszög, így teljesen visszaverődik. A P_3 pontban a beesési szög 60º (ld. ábra) így itt is teljesen visszaverődik. A P_4 pontba a fény merőlegesen esik (ld. ábra), így részben irányváltozás nélkül kilép, részben önmagába visszaverődik. *(8 pont)*

Ezután a fény a P_4-P_3-P_2-P_1 utat járja be, a P_3 és P_2 pontban újra teljesen visszaverődve, majd a P_1 pontban részben kilép, részben teljesen visszaverődik, és ezután az első bekezdésben leírt úton halad P_4-ig, majd újra vissza P_1-ig, amíg a teljes energia nem lép ki P_1 és P_4 pontokon. *(3 pont)*

Ebben az esetben a fény egy része a rövidebb befogón egy része az átfogón lép ki.

2. eset: Az AB szakasz felezőpontja és A pont között érkezik a fénynyaláb



Ebben az esetben a fénysugár mindkét befogón teljesen visszaverődik, az átfogón részlegesen önmagába visszaverődik ill. továbbhaladva kilép a prizmából. (Ugyanazzal a gondolatmenettel indokolható, mint az 1. esetben.) *(4 pont)*

(Ha valaki csak ezt az esetet találta meg akkor 8 pont)

Ebben az esetben csak az átfogón léphet ki. Tehát a fény az átfogón és a kisebb befogón lép ki a prizmából.