

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny

2000. január 20.

Megoldások

1.

Adatok: $V_0 = 2 \text{ dl} = 200 \text{ cm}^3$, $\rho_v = 1 \text{ g/cm}^3$, $m = 200 \text{ g}$, $t_0 = 18^\circ\text{C}$, $c = 4,183 \text{ kJ/(kg}^\circ\text{C)}$ 0°C -os jégkocka: $a = 2 \text{ cm}$, $V = 8 \text{ cm}^3$, $\rho_j = 0,92 \text{ g/cm}^3$, $L_o = 334,96 \text{ kJ/kg}$

a) 3 db jégkockát dobunk a vízbe:

1 kocka $0,92V = 7,36 \text{ cm}^3$, azaz $m_j = 7,36 \text{ g}$ vizet szorít ki, tehát kifolyik a pohárból $3m_j = 22,08 \text{ g}$ víz és marad $m_v = m - 3m_j = 177,92 \text{ g}$.

A jégkockák megolvasztásához és felmelegítéséhez szükséges hőt a víz lehűlése fedezi:

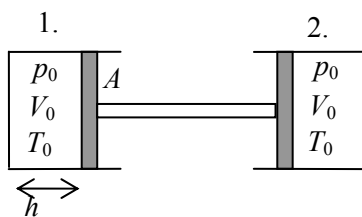
$$* m_v c (t_0 - t) = 3m_j L_o + 3m_j c t. \text{ Ebből a közös hőmérséklet: } t = \frac{m_v c t_0 - 3m_j L_o}{m c} = 7,17^\circ\text{C}.$$

b) Először 1 kockát bedobva $m_j = 7,36 \text{ g}$ 18°C -os víz folyik ki, és marad a pohárban

$$m_v = m - m_j = 192,64 \text{ g} \text{ víz, a közös hőmérséklet } * \text{ alapján: } t_1 = \frac{m_v c t_0 - m_j L_o}{m c} = 14,39^\circ\text{C}.$$

Most 2 jégkockát bedobva, kifolyik $2m_j = 14,72 \text{ g}$, $14,39^\circ\text{C}$ -os víz (tehát a rendszer energiája kevésbé csökken, mint az a) esetben), marad a pohárban $m_v = m - 2m_j = 185,28 \text{ g}$ víz. A végső

$$\text{hőmérséklet } * \text{ alapján: } t_2 = \frac{m_v c t_1 - 2m_j L_o}{m c} = 7,43^\circ\text{C}.$$

A végső hőmérséklet a b) esetben magasabb, bár a különbség nem jelentős.

2.

Adatok: $A = 300 \text{ cm}^2$, $h = 25 \text{ cm}$, $V_0 = A \cdot h = 7500 \text{ cm}^3$ $T_0 = 273 \text{ K}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $M = 29 \text{ g}$ (levegő)

a)

1. tartály: $T_1 = 423 \text{ K}$, p_1 , $V_1 = A(h+x)$,2. tartály: T_0 , p_2 , $V_2 = A(h-x)$.A merev összeköttetés miatt $p_2 = p_1$.

Felírva az állapotegyenleteket, majd elosztva az azokat

$$\text{egymással: } \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 A(h+x)}{T_1} \quad \text{és} \quad \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2 A(h-x)}{T_0} \Rightarrow \frac{h+x}{T_1} = \frac{h-x}{T_0}.$$

$$\text{Tehát a dugattyúk } x = \frac{h(T_1 - T_0)}{T_1 + T_0} = 5,38 \text{ cm} \text{-t mozdulnak el.}$$

b)

$$1. \text{ tartály: } \frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1} \Rightarrow p_1 = 1,55 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

$$2. \text{ tartály: kezdetben } \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{m_0 R}{M}, \text{ majd } p_2 = p_1 \text{ és } \frac{p_2 V_0}{T_0} = \frac{m_2 R}{M}.$$

Ezekből az egyenletekből:

$$m_0 = \frac{p_0 V_0}{T_0} \frac{M}{R} = 9,58 \text{ g, vagy } m_0 = \rho V_0 = 9,69 \text{ g, itt } \rho = 1,2928 \text{ kg/m}^3 \text{ a normálállapotú}$$

levegő sűrűsége,

$$m_2 = \frac{p_2 V_0}{T_0} \frac{M}{R} = \frac{p_2}{p_0} m_0 = 1,55 m_0. \text{ Tehát } \Delta m = 0,55 m_0 \approx 5,3 \text{ g} \text{ levegőt kell a tartályba nyomni.}$$

3.

Adatok:

rézgyűrű: $t_1 = 0^\circ\text{C}$, $d_1 = 2,540\text{ cm}$, $m_1 = 51,6\text{ g}$, $\alpha_1 = 1,62 \cdot 10^{-5}\text{ } 1/^\circ\text{C}$, $c_1 = 385,2\text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$ alumíniumgömb: $t_2 = 100^\circ\text{C}$, $d_1 = 2,545\text{ cm}$, $\alpha_2 = 2,39 \cdot 10^{-5}\text{ } 1/^\circ\text{C}$, $c_2 = 900,21\text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$ (közepes)Az alumínium gömbre: $d_2 = d_0(1 + \alpha_2 100^\circ\text{C})$, $d_0 = \frac{d_2}{1 + \alpha_2 100^\circ\text{C}} = \underline{2,539\text{ cm}}$.Ha nincs hőveszteség: $m_1 c_1 t = m_2 c_2 (100^\circ\text{C} - t)$ * t hőmérsékleten az átmérők megegyeznek:

$$d = d_1(1 + \alpha_1 t), \quad d = d_2(1 + \alpha_2 t) \quad \Rightarrow \quad d_1(1 + \alpha_1 t) = d_2(1 + \alpha_2 t).$$

A közös hőmérséklet: $t = \frac{d_1 - d_0}{d_0 \alpha_2 - d_1 \alpha_1} = \underline{51,2^\circ\text{C}}$.Az alumínium gömb tömege *-ból: $m_2 = \frac{m_1 c_1 t}{c_2 (100^\circ - t)} = \underline{23,16\text{ g}}$.Megjegyzés: Az alumínium gömb tömege a közös hőmérséklet felhasználása nélkül is adódik, a sűrűség felhasználásával. Például $\rho = 2,702\text{ g/cm}^3$, 18°C -on.

$$d = d_0(1 + \alpha_2 18^\circ\text{C}) = 2,540\text{ cm}, \quad V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2} \right)^3 = 8,580\text{ cm}^3, \quad m = \rho V = \underline{23,18\text{ g}}.$$

Az eredmények erősen függenek a számítás közben használt tizedes jegyek számától. Minden elvileg helyes eredmény, ha nem tartalmaz egyéb hibát, teljes pontszámot kapjon.

4.

Adatok: $m_v = 1\text{ kg}$ víz, $T = 273\text{ K}$ marad végig, $L_p = 2500,5\text{ kJ/kg}$, $L_o = 334,96\text{ kJ/kg}$

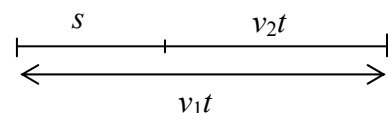
Ha megnöveljük a térfogatot, a víz párolog és mivel zárt térben van, a szükséges hőt a maradék víz megfagyása fedezi.

 m_g elpárolog, $m_v - m_g$ megfagy:

$$m_g L_p = (m_v - m_g) L_o \quad \Rightarrow \quad m_g = \frac{L_o m_v}{L_o + L_p} = 0,118\text{ kg}.$$

Tehát $m_v - m_g = \underline{0,882\text{ kg}}$ jég lesz az edényben.Mivel a telített vízgőz sűrűsége a táblázat szerint 0°C -on $\rho = 0,0048\text{ kg/m}^3$, az edény térfogatát $V_g = m_g / \rho = \underline{24,58\text{ m}^3}$ -rel kell megnövelni.

5.

Adatok: $v_1 = 101\text{ km/h} = 28,06\text{ m/s}$,
 $v_2 = 88\text{ km/h} = 24,44\text{ m/s}$, $s = 50\text{ m}$ 

a) Amikor a gepárd elfogja az antilopot:

 $s + v_2 t = v_1 t$. Tehát $t = \frac{s}{v_1 - v_2} \approx \underline{13,8\text{ s}}$ alatt utolérte. Eközben $v_1 t \approx \underline{387,6\text{ m}}$ távolságot futott

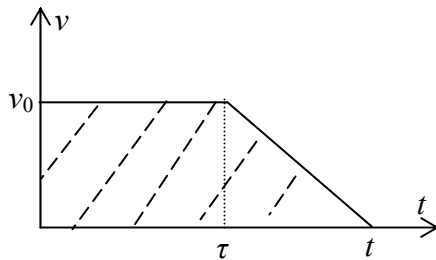
be.

b) $t' = 20\text{ s}$ $s' + v_2 t' = v_1 t' \quad \Rightarrow \quad s' = (v_1 - v_2) t' = \underline{72,4\text{ m}}$ előny esetén még beéri az antilopot.

6.

Adatok: $s = 4 \text{ m}$, $a = 7 \text{ m/s}^2$, $\tau = 0,5 \text{ s}$ Az autó a reakcióidő alatt még v sebességgel halad, utána egyenletesen lassul a megállásig.

A sebesség-idő grafikon alatti terület a megállásig megtett út:



$$s = \frac{v_0(\tau + t)}{2} \quad *$$

A sebesség a $t - \tau$ idő alatt lesz nulla: $v_0 = a(t - \tau)$,

$$*-ból \quad s = \frac{a}{2}(t^2 - \tau^2) \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} + \tau = \underline{1,18 \text{ s.}}$$

Így a megengedett sebesség:

$$v_0 = a(t - \tau) = 4,76 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 17,14 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

A reakcióidő alatt megtett út $v_0 \cdot \tau$, ennek aránya a teljes úthoz:

$$\frac{v_0 \tau}{s} = \frac{2,38}{4} = 0,595 = \underline{59,5 \%}.$$

7.

Adatok: $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $\mu = 0,2$, $s = 4 \text{ m}$, $s_1 = ?$ $s_2 = ?$ $t_1 = ?$ $t_2 = ?$ (ahol az 1-es index tartozik a csúsztatáshoz, a 2-es a hajításhoz)

a) Ha csúszik a korong, akkor

$$a = -\mu g, \quad v(t) = v_0 - \mu g t \quad \text{és} \quad 0 = v_0 - \mu g t_{cs} \Rightarrow t_{cs} = \frac{v_0}{\mu g} = \underline{5,1 \text{ s}},$$

$$s_1 = \frac{v_0}{2} t_{cs} = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \underline{25,48 \text{ m.}}$$

Innen $t_1 = \underline{0,417 \text{ s}}$, a másik gyök nagyobb, mint t_{cs} .b) Ha elhajítjuk a korongot, akkor röpkül a legmesszebbre, ha a hajítás szöge 45° :

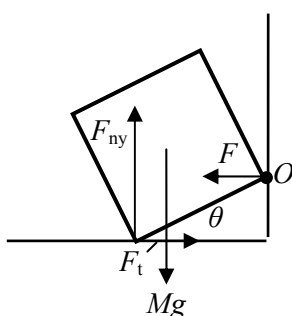
$$s_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \underline{10,19 \text{ m.}}$$

Ha a hajítás 4 m-re történik, akkor $s = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}$, innen $\beta = 111,55^\circ$, $t_2 = \frac{s}{v_0 \cos \beta} = \underline{0,408 \text{ s.}}$

Ha a korongot csúsztatjuk, lényegesen messzebbre jut mint elhajítva. Viszont a 4 m-re lévő célba előbb eljut a megfelelően elhajított korong, mint a csúsztatott.

Megjegyzés: Elképzelhető a rugalmatlan ütközés úgyis, hogy a korong csak a felületre merőleges sebességkomponensét veszíti el. Akkor az ütközés után még csúszik is a korong és így eljuthat 28,22 m távolságra (ha a hajítás szöge $10,08^\circ$), ami már nagyobb a csúszással megtett távolságnál.

8.



Rajzoljuk fel a testre ható erőket, és írjuk fel a kocka egyensúlyának feltételeit:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \Rightarrow F - F_t = 0$$

$$F_{ny} - Mg = 0$$

$$\sum M_i = 0 \text{ az O-n átmenő tengelyre:}$$

$$Mg \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(45^\circ - \theta) + F_t a \sin \theta - F_{ny} a \cos \theta = 0.$$

A kocka addig nem csúszik meg, amíg $F_t \leq \mu_0 F_{ny}$.

A fentiekből következik, hogy $\mu_0 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 1 \right)$ szükséges az egyensúlyhoz, ahonnan a

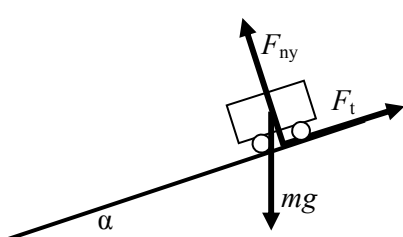
minimális μ_0 leolvasható: $\mu_{0\min} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \theta - 1)$.

Megjegyzés: A kocka fenti helyzete csak $\theta \leq 45^\circ$ -nál jöhet létre.

9.

Adatok: $\mu_0 = 0,08$, $v_0 = 60 \text{ km/h} = 16,67 \text{ m/s} > v$, $v_1 = 0$

Ha $v_1 = 0$, akkor az autóra ható erők az ábrán láthatóak. Az egyensúly feltétele:



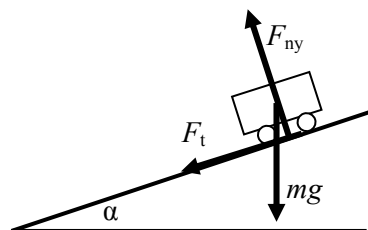
$$F_{ny} - mg \cos \alpha = 0$$

$$mg \sin \alpha - F_t = 0, \text{ a tapadás miatt } F_t \leq \mu_0 F_{ny},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu_0 \Rightarrow \alpha \leq 4,57^\circ.$$

Ha az úttestet megdöntjük, akkor a pálya sugara kisebb lehet, mint vízszintes pálya esetén.

A mozgó autó esetén célszerű az erőket vízszintes és függőleges komponensekre bontani, mivel az eredő erő vízszintes, a körpálya középpontjába mutat és mv^2/R nagyságú (v állandó):



$$F_{ny} \sin \alpha + F_t \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

$$F_{ny} \cos \alpha - F_t \sin \alpha - mg = 0,$$

Innen

$$F_t = m \frac{v^2}{R} \cos \alpha - mg \sin \alpha \text{ és } F_{ny} = m \frac{v^2}{R} \sin \alpha + mg \cos \alpha.$$

A kerekek tapadnak, ha $F_t \leq \mu_0 F_{ny}$, ahonnan $R \geq \frac{v^2 (\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha)}{g (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)} = 175,8 \text{ m}$.

Megjegyzés: Ha a sebesség nem állandó, akkor a tapadási erő egy része biztosítja a sebességváltozást és csak a másik része akadályozza a kicsúszást! Az R-re kapott egyenlőtlenségből megmutatható, hogy a jobb oldal α -nak csökkenő függvénye!

10.

$$\text{A lépcsős tárcsára: } \Theta = \frac{1}{2} \frac{2}{3} MR^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{3} \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{3}{8} MR^2.$$

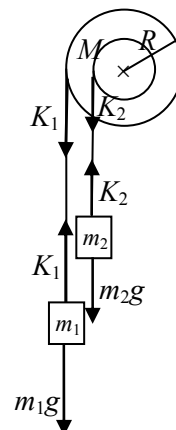
Írjuk fel a mozgásegyenleteket:

$$m_1 g - K_1 = m_1 a_1$$

$$m_2 g - K_2 = m_2 a_2$$

$$\frac{K_1 R + K_2 \frac{R}{2}}{2} = \Theta \beta$$

Tegyük fel, hogy mindkét kötel feszes, akkor $K_1, K_2 > 0$ és $a_1 = \beta R$, $a_2 = \beta R/2$.



Innen

$$a_1 = \frac{8m_1 - 4m_2}{8m_1 + 2m_2 + 3M} g, \quad a_2 = \frac{a_1}{2}, \quad \beta = \frac{a_1}{R},$$

$$K_1 = \frac{m_1(3M - 2m_2)}{8m_1 + 2m_2 + 3M} g > 0, \quad \text{ha } M > \frac{2}{3}m_2.$$

Ha

$$M = \frac{2}{3}m_2, \quad \text{akkor } K_1 = 0, \quad a_1 = g, \quad \text{és}$$

$$M < \frac{2}{3}m_2, \quad \text{akkor } K_1 = 0, \quad a_1 = g, \quad K_2 \text{ mindig pozitív!}$$

A mozgásegyenletek:

$$m_2 g - K_2 = m_2 a_2$$

$$K_2 \frac{R}{2} = \Theta \beta \quad \text{és} \quad a_2 = \frac{R}{2} \beta.$$

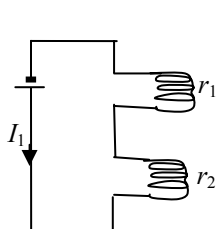
$$\text{Innen } a_2 = \frac{2m_2}{2m_2 + 3M} g, \quad \beta = \frac{2a_2}{R}, \quad a_1 = g.$$

11.

Adatok: $U = 33 \text{ V}$, $r_1 = 50 \Omega$, $r_2 = 250 \Omega$, $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$, $U_{1be} = 5 \text{ V}$, $U_{1ki} = 3 \text{ V}$, $U_{2be} = 10 \text{ V}$, $U = 6 \text{ V}$

A relék ki-, illetve bekapcsolt állapotától függ, hogy az áramkör mely részén folyik áram, és hogy az ellenállások hogyan kapcsolódnak egymáshoz. Az áramkörből egyszerűbb rajz készíthető, ha csak azt a részét rajzoljuk le, ahol folyik áram.

1. lépés: mindkét relé nyitva van a kapcsoló zárásának pillanatában:



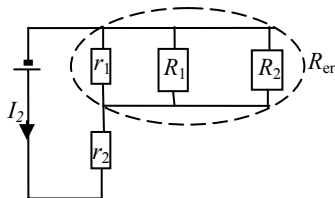
$$I_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} = \underline{0,11 \text{ A}}.$$

A relékre jutó feszültségek:

$$U_1 = r_1 I_1 = \underline{5,5 \text{ V}}, \quad U_2 = r_2 I_1 = \underline{27,5 \text{ V}}.$$

Mindkét relé behúz!

2. lépés: relék zárva:

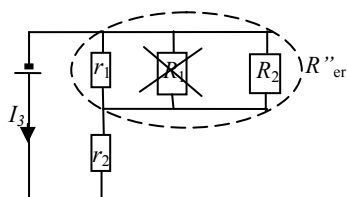


$$\frac{1}{R_{er}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad R_{er} = \underline{23,81 \Omega}.$$

$$I_2 = \underline{0,12 \text{ A}}, \quad U_1' = \underline{2,86 \text{ V}}, \quad U_2' = \underline{30,14 \text{ V}}.$$

Megszakad az 1-es relé!

3. lépés: 1. relé nyitva, 2. relé zárva:



$$R''_{er} = \underline{45,45 \Omega}, \quad I_3 = \underline{0,112 \text{ A}}$$

$$U_1'' = \underline{5,09 \text{ V}} \quad \text{és} \quad U_2'' = \underline{27,91 \text{ V}}.$$

Az 1-es relé újra behúz, és periodikusan ismétlődik a 2. és 3. lépés.

12.

Adatok: $A = 1,2 \text{ mm}^2$, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$, $r = 24 \text{ cm}$, $B = 0,15 \text{ T}$, $\beta = 12 \text{ rad/s}^2$.Számítsuk ki a szögelfordulást: $\Theta = \frac{1}{2} \beta t^2$.Számítsuk ki az $OPQO$ hurok ellenállását:

$$R(\Theta) = 2R_r + R_r \Theta = R_r \left(2 + \frac{1}{2} \beta t^2 \right), \quad \text{ahol} \quad R_r = \rho \frac{r}{A}.$$

A hurkon átmenő indukciófluxus:

$$\Phi = B \frac{\Theta}{2\pi} r^2 \pi = \frac{1}{4} \beta r^2 B t^2 = \text{állandó} \cdot t^2. \quad \text{Az indukált feszültséget}$$

hasonló módon számoljuk ki, mint a gyorsuló mozgásoknál az út-idő függvényből a sebességet:

$$U_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} \beta r^2 B t.$$

Az indukált áram:

$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{\frac{1}{2} \beta r^2 B t}{\rho \frac{r}{A} \left(2 + \frac{1}{2} \beta t^2 \right)},$$

összük el a számlálót és a nevezőt is t -vel: $I = \frac{\beta r B A}{2\rho} \frac{1}{\frac{2}{t} + \frac{\beta t}{2}}$, az áram ott lesz maximális,

ahol a második tört nevezője minimális. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepekre

vonatkozó egyenlőtlenséget: $\frac{\frac{2}{t} + \frac{\beta t}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{2}{t} \cdot \frac{\beta t}{2}} = \beta.$

Ezt felhasználva: $I \leq \frac{\beta r B A}{4\rho\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} r B A}{4\rho} = 2,2 \text{ A} = I_{\max}.$

Hol lesz maximális az áramerősség, ahol:

$$\frac{2}{t_m} = \frac{\beta t_m}{2} \Rightarrow t_m^2 = \frac{4}{\beta}, \quad \Theta(t_m) = \frac{1}{2} \beta t_m^2 = 2 \text{ rad}.$$