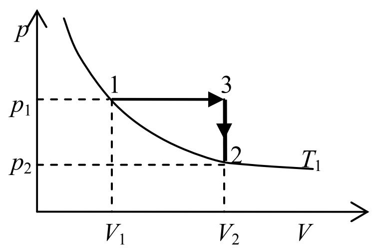
Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny
1999. január 21.
Megoldások

1.
Adatok: $T = 300$ K, p_{Ne}= 8,85 kPa, m_{Ne}= 0,225 g, m_{CH4}= 0,32 g, M_{Ne}= 20 g, M_{CH4}= 16 g, M_{Ar}= 40 g, p=?



Kiszámoljuk az egyes gázokban lévő részecskék (atomok, ill. molekulák) számát:
$N_{Ne}= 6{,}75\cdot10^{21}$, $N_{CH4}= 12\cdot10^{21}$, $N_{Ar}= 2{,}55\cdot10^{21}$, $N= 21{,}3\cdot10^{21}$.
De számolhatjuk a parciális nyomásokat is: p_{Ar}= 3,34 kPa, p_{CH4}= 15,73 kPa.
Az állapotegyenletet felírva a kezdeti és a végállapotra:
$p_{Ne}\cdot V = N_{Ne}\cdot k\cdot T$ *és* $pV = NkT$, ahonnan

$$p = p_{Ne}\frac{N}{N_{Ne}} = \underline{27{,}9\text{ kPa}}.$$

2.
Adatok: T_1= 10˚C= 283 K, T_2= 30˚C= 303 K, p_1= 10^5 Pa, A= 1 m^2, ρ= 1000 kg/m^3, g = 9,81 m/s^2.

a) p_1=áll., V=áll.
Kezdetben a szobában legyen N1 részecske, 30˚C-on pedig N2. Írjuk fel az állapotegyenletet a kezdeti és a végállapotra: $p_1V = N_1kT_1$ és $p_1V = N_2kT_2$, ahonnan $N_2/N_1 = T_1/T_2$. Az eltávozó levegő mennyisége $N_1 - N_2 = \Delta N$ -el arányos, vagyis $\Delta N/N_1 = 1 - T_1/T_2 = \underline{6{,}6\,\%}$.

b) N_1=áll., p_2=?, F=?, h=?
Felírva az állapotegyenleteket: $p_1V = N_1kT_1$ és $p_2V = N_1kT_2$, ahonnan

$$p_2 = p_1T_2/T_1 = \underline{1{,}07\cdot10^5\,\text{Pa}},$$

$$F = (p_2 - p_1)A = \underline{7{,}07\text{ kN}},\quad h = \frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} = \underline{72\text{ cm}}.$$ Ilyen vízmélységekhez akváriumot már az ablaküvegnél vastagabb anyagból készítik. Lehet, hogy ezt a nyomást már nem bírná elviselni az ablaküveg.

3.
Adatok: T_1= 300 K, Q = 3750 J, V_2/V_1= ?, p_2/p_1= ?, T_{max}=?

Sokat segíthet, ha az állapotváltozást lerajzoljuk a p-V síkon. Mivel a kezdő- és a véghőmérséklet azonos, a teljes folyamat során a belsőenergia állandó marad, ΔE= 0. Írjuk fel az I. főtételt erre a folyamatra: $\Delta E = Q + W_{külső} = Q - W_{gáz} = 0$, ahonnan

$Q = W_{gáz} = p_1(V_2 - V_1)$. Az állapotegyenletből $p_1 = \frac{NkT_1}{V_1}$, és $p_1V_1 = p_2V_2$.

$$Q = NkT_1\frac{V_2 - V_1}{V_1} = NkT_1\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right),$$ innen $\frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{Q}{NkT_1} = \underline{2{,}51}$, $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2} = \underline{0{,}4}$. A hőmérséklet

3-ban maximális, az 1→3 folyamatnál felhasználva, hogy p_1=áll.,

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_{\max}} \rightarrow T_{\max}=T_1\frac{V_2}{V_1}=\underline{752{,}9\ \text{K}}.$$

4.
Adatok: m = 36 g, n = 2, T = 373 K=áll., L_{forr}= 2,26 kJ/g, V_2= V_1/3, p_2= 2p_1, V_1 = ?, Q = ?
Abból, hogy a hőmérséklet állandósága ellenére a (pV) szorzat lecsökken, az következik, hogy a gőz fázisban lévő molekulák száma megváltozik. A térfogatcsökkenés közben nő a nyomás egészen addig, amíg eléri a telített vízgőz állapotot, ezután a nyomás már nem változik, a vízgőz egy része viszont lecsapódik, miközben Q_1 hő szabadul fel. Az állandó hőmérséklet megtartásához el kell vezetni részben a Q_1 hőt, részben azt a Q_2 hőt, amely egyenlő azzal a munkával, melyet a telített gőz állapot eléréséig végzünk. Mivel p_2= 101,3 kPa(≈10^5 Pa), p_1= 50,65 kPa (0,5·10^5 Pa). Az állapotegyenletből: $V_1=\frac{nRT}{p_1}=\underline{0{,}122\ \text{m}^3}$.

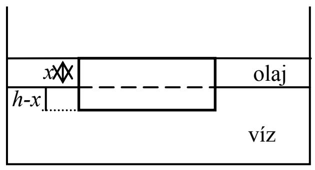
A telítet gőz állapotába akkor ér a gőz, amikor a nyomás p2, a térfogat $V_3=\frac{p_1V_1}{p_2}=\frac{V_1}{2}$, az

eddig végzett munka és az elvezetendő hő $Q_2=-W=nRT\ln\frac{V_1}{V_3}=4{,}3\ \text{kJ}$.

A lecsapódott gőz tömege $\Delta m=m\frac{V_3-V_2}{V_3}=\frac{m}{3}=12\ \text{g}$, a felszabadult hő

$Q_1=\Delta m\cdot L_{forr}=27{,}12\ \text{kJ}$. Az összesen elvezetendő hő $Q=Q_1+Q_2=\underline{31{,}42\ \text{kJ}}$.
Ha a megoldásban sűrűségadatokat használunk, akkor kicsit más eredményeket is kaphatunk, a lecsapódó víz térfogatát érdemes elhanyagolni!

5.
Adatok: h= 10 cm, h_{be}= 0,75h, $\rho_{víz}$= 1000 kg/m^3, ρ_{olaj}= 649,5 kg/m^3, x = ?

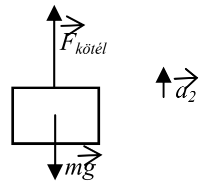


Az úszásra felírva az egyensúly feltételét $mg–F_{fel}$= 0, ha a test keresztmetszete A, akkor $Ah\rho_{fa}$= A·0,75h·$\rho_{víz}$,
ahonnan ρ_{fa}= $\underline{750\ \text{kg/m}^3}$.
Jelöljük x-el az olajréteg vastagságát, amikor az olaj felső szintje egybeesik a falemez felső szintjével, akkor a vízbe merülő rész magassága $h–x$, így a nyomás a falemez aljánál $p=p_0+\rho_{olaj}gx+\rho_{víz}g\left(h-x\right)$. Ebben az esetben az egyensúly feltétele $mg+p_0A-pA=0$, ahonnan $x=\frac{h\rho_{víz}}{4\left(\rho_{víz}-\rho_{olaj}\right)}=\underline{7{,}13\ \text{cm}}$.

Ha további olajat rétegezünk az eddigiek tetejére, akkor a nyomóerők különbsége (a felhajtóerő) nem változik meg, ezért a víz és az olaj határréteghez képest a falemez helyzete nem változik meg. Ez a helyzet stabil lesz, mert, ha a lemezt kicsit lenyomjuk, akkor nő a felhajtóerő és ezért magára hagyva visszaemelkedik előző helyzetébe. Hasonlóan, ha kicsit kiemeljük innen, akkor csökken a felhajtóerő, és ezután elengedve az visszasüllyed az egyensúlyi helyzetébe.

6.
Adatok: m = 150 kg, a_1= 4 m/s^2, t_1= 2,5 s, t_2= 1 s, g = 9,81 m/s^2, v_1= ?,
$F_{kötél}$= ?

A felvonó kezdősebesség nélkül indul, majd állandó gyorsulással mozog, így a fékezés előtti sebessége $v_1 = a_1 t_1 = \underline{10\ \text{m/s}}$. a fékezés szakaszára $a_2 = \dfrac{0 - 10\ \text{m/s}}{t_2} = \underline{-10\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}$.



A mozgásegyenletet felírva a fékezés idejére $mg - F_{kötél} = ma_2$, innen $F_{\text{kötél}} = \underline{2{,}91\ \text{kN}}$.

7.

Adatok: $l = 1$ m, $\varphi = 60°$, $m_1 = m$, $m_2 = 4m$, $\mu = 0{,}15$, $v_1 = ?$, $u_1 = ?$, $h_1 = ?$, $s = ?$

A kezdő- és az ütközés előtti pillanatra felírva a mechanikai energiamegmaradás tételét $mg\dfrac{l}{2} = \dfrac{1}{2}mv_1^2$, inenen $v_1 = \underline{3{,}13\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}$. Az ütközés rugalmas, ezért az ütközésre alkalmazható az energia- és a lendületmegmaradás tétele $\dfrac{1}{2}mv_1^2 = \dfrac{1}{2}mu_1^2 + \dfrac{1}{2}4mu_2^2$, innen

$u_2 = \dfrac{2v_1}{5} = \underline{1{,}253\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}$, $u_1 = v_1 - 4u_2 = \underline{-1{,}88\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}$.

Az ütközés után a golyó maximális felemelkedése az energiamegmaradás tételéből számítható $mgh_1 = \dfrac{1}{2}mu_1^2$, $h_1 = \underline{18\ \text{cm}}$.

A meglökött test $a = \mu g = 1{,}47\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ lassulással $s = \dfrac{u_2^2}{2a} = \underline{53{,}4\ \text{cm}}$ úton áll meg.

8.

Adatok: $v_1 = 1{,}2$ m/s, $v_2 = 1$ m/s, $\mu = 0{,}3$, $h = 4$ m, $\alpha = 30°$, $a_1 = ?$, $v = ?$, $a_2 = ?$, $l = ?$

Írjuk fel a lejtőn mozgó test mozgásegyenletét:

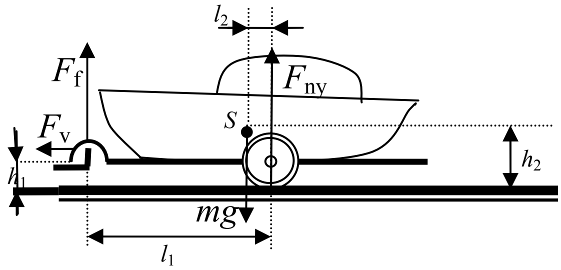
a csúszdán: $mg\sin\alpha - F_s = ma_1$ *és* $mg\cos\alpha - F_{ny} = 0$, $F_s = \mu F_{ny}$, $a_1 = \underline{2{,}36\ \text{m/s}^2}$.

a kifutón: $mg - F_s' = ma_2$, $F_{ny}' = mg$, $a_2 = \underline{-2{,}94\ \text{m/s}^2}$. A csúszda aljában a sebesség a munkatételből is kiszámítható: $\dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_1^2 = mgh - F_s\dfrac{h}{\sin\alpha}$, innen $v = 6{,}25\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. Legyen l a kifutó hossza: $\dfrac{1}{2}mv_2^2 - \dfrac{1}{2}mv^2 = -\mu mgl$, innen $l = \underline{6{,}48\ \text{m}}$.

9.

Adatok: $l_1 = 3$ m, $l_2 = 0{,}1$ m, $h_1 = 0{,}4$ m, $h_2 = 1$ m, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ m/s^2, $a_3 = -5$ m/s^2, $F_{\text{csukló,x}} = ?$, $F_{\text{csukló,y}} = ?$

A rajzon az utánfutóra ható erők láthatók, akkor tekintjük pozitívnak őket, ha irányuk megegyezik a rajzon látható iránnyal. Az erők forgatónyomatékának összege a tömegközéppontra minden esetben 0 kell, hogy legyen (sajátperdület-tétel szerint gyorsuló kocsi esetében is):



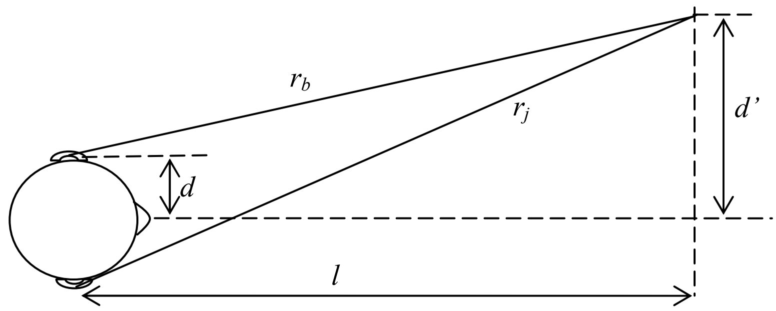
$F_v(h_2 - h_1) + F_f(l_1 - l_2) - F_t h_2 - F_{ny} l_2 = 0.$

A mozgásegyenlet vízszintes és függőleges komponensegyenlete:
$F_v - F_t = ma$ és $F_{ny} - mg + F_f = 0$, ahol F_t a kerék szöggyorsulását biztosítja. Ha feltételezzük, hogy a kerekek tehetetlenségi nyomatéka kicsi, akkor F_t elhanyagolható a többi erő mellett.

A fenti összefüggésekből $F_v \approx ma$, $F_f \approx m\dfrac{gl_2 - a(h_2 - h_1)}{l_1}$. Newton III. törvénye szerint a csuklóra ható erők komponensei ellentétes irányúak és azonos nagyságúak, mint az utánfutóra ható erők.

a) Ha $a = 0$, akkor F_v= 0 N, F_f= 327 N, $F_{csukló,x}$= <u>0 N</u>, $F_{csukló,y}$= <u>327 N ↓.</u>
b) Ha $a = 2$ m/s^2, akkor F_v= 2000 N, F_f= –73 N, $F_{csukló,x}$= <u>2000 N→</u>, $F_{csukló,y}$= <u>73 N ↑.</u>
c) Ha $a = -5$ m/s^2, akkor F_v= –5000 N, F_f= 1327 N, $F_{csukló,x}$= <u>5000 N←</u>, $F_{csukló,y}$= <u>1327 N ↓</u>.

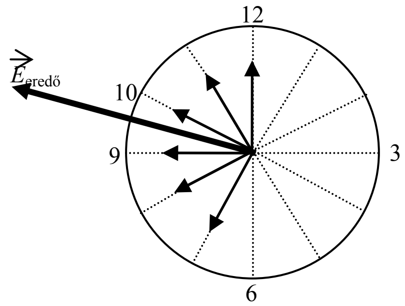
10.
Adatok: $2d$ = 15 cm, l = 10 m, $d'=l\cdot\text{tg}5°$= 0,875 m, c_{hang}= 340 m/s, Δt = ?



Használjuk a rajzon látható jelöléseket,

$$r_b^2 = (d-d')^2 + l^2,\ r_j^2 = (d+d')^2 + l^2,\ \Delta t = \frac{r_j - r_b}{c_{hang}} = \underline{3{,}85\cdot 10^{-5}\,\text{s}}.$$

11.
Az i-ik órát jelző pontban –i·q töltés van, az ettől a töltéstől származó térerősség az óra O középpontjában az adott töltés fele mutat, és nagysága $E_i = k\dfrac{iq}{r^2}$, ahol r egy olyan kör sugara, amelynek kerületén helyezkednek el az egész órát jelző pontok (az óra számlapját szabályos körnek gondoljuk el). A 12 töltéstől származó térerősségvektorok összeadását célszerű első lépesben úgy kezdeni, hogy összeadjuk páronként az egy egyenesbe esőket, így kapjuk a rajzon látható hat azonos $k\dfrac{(i+6)q}{r^2} - k\dfrac{iq}{r^2} = k\dfrac{6q}{r^2}$ nagyságú vektort. Mivel ez a vektorrendszer szimmetrikus a 9 és 10 órát jelző pontokhoz tartozó szög szögfelezőjére, ezért az eredő erre az egyenesre esik. <u>A kismutató fél 10-kor mutat ebbe az irányba</u>. A megoldásnál feltételeztük, hogy q>0. Az eredő irányába eső komponenseket összeadva kiszámítjuk az eredő nagyságát is:



$$\frac{2\cdot 6\cdot q\cdot k}{r^2}\left(\cos 75^0 + \cos 45^0 + \cos 15^0\right) = 23{,}18\frac{q\cdot k}{r^2}.$$

12.
Adatok: B_z= 0,62·10^{-4} T, l_{sz}= 2,5 m, l_h= 9,5 m, l_m= 3,5 m, v = 60 km/h = 16,67 m/s, ε_0= 8,85·10^{-12}As/Vm, $\mathcal{E}_i$= ?, E = ?, Q = ?
Az $\mathcal{E}_i$ indukált elektromotoros erő egyenlő az időegység alatt elmetszett erővonalak számával: $\mathcal{E}_i = B_z \cdot l_{sz} \cdot v$ = <u>2,58·10^{-3} V/m</u>.
A térerősség nagysága $E = \mathcal{E}_i / l_{sz}$= <u>1,033·10^{-3} V/m, iránya merőleges a haladás irányára</u>, azaz az oldalfalakra. A töltés kiszámításánál tegyük fel, hogy a kialakuló elektromos tér jól közelíthető, egy homogén elektromos térrel, mely mindenütt a kocsi eleje és végénél is a fenti térerősséggel bír. Akkor töltés csak az oldallapokon van, melyeken azonos nagyságú, de ellentétes előjelűek a töltések. A töltés nagyságát Gauss-tételéből számíthatjuk ki: tekintsünk egy a kocsi határoló lapjaival párhuzamos oldalú téglatestet úgy, hogy az tartalmazza az egyik oldalfalat, akkor $E \cdot l_h \cdot l_m = Q/\varepsilon_0$, innen Q = <u>3,04·10^{-13} C</u>.

13.
Adatok: m = 1 kg, l = 1 m, I = 50 A, μ_0= 0,6, B_{min}= ?, α = ? (a függőlegessel bezárt szög)
Az elmozdítani kívánt rúdra ható $F = B \cdot I \cdot l$ mágneses erő merőleges a rúd és a $\vec{B}$ vektor által meghatározott síkra. A rúdra hat még a súlyerő, a függőleges nyomóerő és a tapadási erő, ami vízszintes irányú. Addig nem mozdul el a rúd, amíg az erők egyensúlyban vannak. Ennek feltételét írjuk fel mind a vízszintes, mind a függőleges komponensekre:
$F\cos\alpha - F_t = 0,\ \ N + F\sin\alpha - mg = 0,\ \ F_t < \mu_0 N,$ ha teljesül az egyenlőtlenség, akkor nem mozdul meg a rúd. Határozzuk meg erre az esetre a minimális mágneses teret, és irányát. A fenti egyenletekből $F = \dfrac{mg}{\sin\alpha + \cos\alpha/\mu_0}$. Látható, hogy F-nek ott lesz minimuma, ahol a $\sin\alpha + \cos\alpha/\mu_0$ kifejezésnek maximuma van. Ez a szög meghatározható differenciálhányados függvény zérus helyének kiszámításával, vagy a függvény trigonometrikus átalakításával, vagy közelítő numerikus eljárással. Mindegyik teljes értékű.
Itt a trigonometrikus átalakítást mutatjuk meg:

$$f(\alpha) = \sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\mu_0} = \mu_0^{-1}\left(1+\mu_0^2\right)\left[\mu_0\left(1+\mu_0^2\right)^{-1}\sin\alpha + \left(1+\mu_0^2\right)^{-1}\cos\alpha\right] = \mu_0^{-1}\left(1+\mu_0^2\right)\sin\left(\alpha+\varepsilon\right),$$

ahol $\mu_0\left(1+\mu_0^2\right)^{-1} = \cos\varepsilon$ *és* $\left(1+\mu_0^2\right)^{-1} = \sin\varepsilon$. Ezekből tg$\varepsilon$=1/$\mu_0$, ε = 59°. f(α)-nak ott lesz maximuma, ahol sin(α+ε)= 1, innen α = <u>31°</u>.
Ezt behelyettesítve, F = 5,145 N, B = <u>0,1 T</u> adódik.

14.
Adatok: E_e= 8,8·10^{-11} W/m^2, d = 7,0 mm, ρ_N= 3,5·10^{-3} (fényév)$^{-3}$, P_{ki}= 3,9·10^{26}W,
1 fényév= 9,46·10^{15} m, P_{szem}= ?, N = ?, r_{max}= ?
A pupilla keresztmetszetén bejutó fény éri a szemünket: $P_{szem} = E_e d^2\pi/4 = \underline{3{,}387\cdot 10^{-15} W}$.
Először határozzuk meg, milyen távol lehet a még éppen látható csillag: a csillag által kibocsátott fényteljesítmény egy őt körülvevő gömb teljes felületén egyenletesen oszlik el, ha még látjuk az r távolságban lévő csillagot, akkor

$$P_{ki} \geq E_e 4r^2\pi,\ \ \text{vagyis}\ \ r_{max} = \sqrt{\frac{P_{ki}}{4\pi E_e}} = 5{,}94\cdot 10^{17}\,\text{m} = \underline{62{,}8\ \text{fényév}}.$$

A még észlelhető csillagok számát becsülhetjük a talpunk, mint középpont körül írt r_{max} sugarú félgömbben lévő csillagok számával $N \approx \dfrac{\rho_N 2r_{max}^3\pi}{3} = \underline{1813}$.