Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LV. esztendő

2016-2017. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Határozzuk meg az α és β valós számokat ($0 < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < 2\pi$), ha tudjuk, hogy a

$$\cos(x+\alpha)+\sin(x+\beta)+\sqrt{2}\cdot\cos x=0$$

egyenlet bármely valós x esetén teljesül.

2. Az x, y, z pozitív valós számok mindegyike kisebb 2-nél és $x^2+y^2+z^2=3$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{3}{2}<\frac{1+y^2}{2+x}+\frac{1+z^2}{2+y}+\frac{1+x^2}{2+z}<3.$$

3. Hol helyezkednek el a derékszögű koordináta rendszerben azok a $P(x;\,y)$ pontok, amelyek koordinátáira $y \ge \sqrt{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$ és $4x^2 \le \left(2-\sqrt{y}\right)\cdot\left(2+\sqrt{y}\right)$?

4. Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első n tagjának összege S_n. Melyik a legnagyobb az $\frac{S_1}{a_1};\frac{S_2}{a_2};\ldots;\frac{S_{15}}{a_{15}}$ számok közül, ha tudjuk, hogy $0<S_{15}$ és $S_{16}<0$?

5. Az ABC háromszög beírt körének középpontja K. A beírt kör az AC oldalt D-ben, az AB oldalt E-ben érinti, a DE szakasz felezőpontja pedig F. Igazoljuk, hogy az FAB és FCA háromszögek területe akkor és csak akkor egyenlő, ha az FK egyenes merőleges a BC egyenesre.

6. Egy szabályos háromszög oldalait n egyenlő részre osztjuk ($n \ge 2$ egész), majd az osztópontokra illeszkedő, az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel felosztjuk a háromszöget n^2 darab egybevágó szabályos háromszögre. Hány olyan paralelogramma van, amelynek csúcsai a kis háromszögek csúcsai közül kerülnek ki?