Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2012–13-as tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

Az első forduló feladatainak megoldásai

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 13 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül** az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a Versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2012. november A versenybizottság

1. feladat

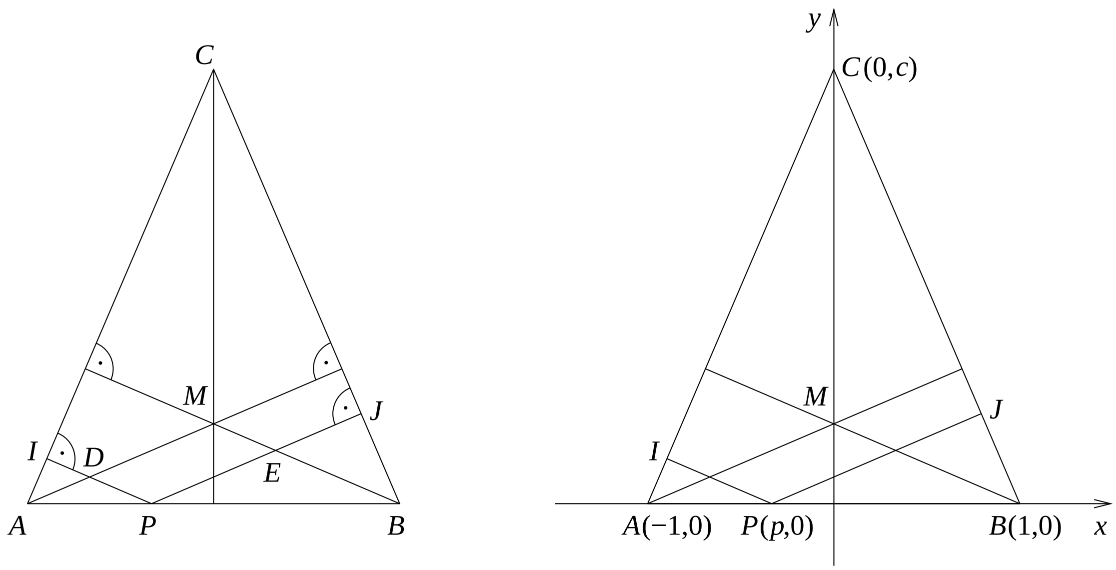
Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapján vegyünk fel egy P pontot. P-ből merőlegeseket állítunk a két szár egyenesére, ezek talppontjai I, illetve J. A háromszög magasságpontját jelölje M. Mutassuk meg, hogy a PM egyenes áthalad az IJ szakasz felezőpontján.

Első megoldás: Nyilván $PI \parallel BM$ és $PJ \parallel AM$, ezekből több következtetést vonhatunk le. Legyen egyrészt D és E az AM és PI, illetve a BM és PJ egyenesek metszéspontja, ekkor a $PEMD$ négyszög parallelogramma. (1 pont)

Másrészt PBE és APD hasonló egyenlő szárú háromszögek, hasonlóságuk aránya $\lambda = PB : AP$. Ugyancsak hasonlók a BPJ és API háromszögek, mégpedig ugyanazzal a λ aránnyal. (2 pont)

Ezért $PJ : PI = PE : PD \ (= \lambda)$, azaz $PJ : PE = PI : PD$. Tehát egy P középpontú, alkalmas arányú középpontos nagyítás a DE szakaszt az IJ szakaszba, a felezőpontot a felezőpontba viszi. (2 pont)

Amikor a $PEMD$ parallelogrammát a P csúcsából mint középpontból nagyítjuk, a parallelogramma középpontja – azaz DE felezőpontja – a PM átló mentén mozdul el. Tehát IJ felezőpontja rajta van a PM egyenesen. (2 pont)



Második megoldás: Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy koordinátarendszerben elhelyezve a háromszög csúcsai $A(-1,0)$, $B(1,0)$ és $C(0,c)$, valamint az adott pont $P(p,0)$. A háromszög magasságpontja ekkor $M(0,1/c)$. (1 pont)

A PM egyenes egyenlete ezekből

$$\frac{1}{c}x + py = \frac{p}{c}\,. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az AC és BC száregyenesek egyenlete

$$y = cx + c\,, \qquad \text{illetve} \qquad y = -cx + c\,.$$

A P pontból AC-re és BC-re állított merőlegesek egyenlete

$$x + cy = p\,, \qquad \text{illetve} \qquad x - cy = p\,.$$

Az egyenletrendszerek megoldásával az

$$I\left(\frac{-c^2+p}{c^2+1}\,,\,\frac{cp+c}{c^2+1}\right), \qquad \text{illetve} \qquad J\left(\frac{c^2+p}{c^2+1}\,,\,\frac{-cp+c}{c^2+1}\right)$$

pontokhoz jutunk. (3 pont)

Az IJ szakasz felezőpontja az

$$F\left(\frac{p}{c^2+1}\,,\,\frac{c}{c^2+1}\right)$$

pont. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy F koordinátái kielégítik a PM egyenes fenti egyenletét. (2 pont)

2. feladat

Legyenek $1 \leq k \leq n$ rögzített egészek. Mennyi az

$$x_1 x_2 \dots x_k + x_2 x_3 \dots x_{k+1} + \dots + x_{n-k+1} x_{n-k+2} \dots x_n$$

kifejezés maximuma, ha $x_1, \dots, x_n$ nemnegatív számok és összegük 1?

Megoldás: Jelölje az összeget S. Ha $x_1 = \dots = x_{n-k} = 0$ és $x_{n-k+1} = \dots = x_n = 1/k$, akkor $S = 1/k^k$. Megmutatjuk, hogy ez a keresett maximum. (1 pont)

Írjuk S első két tagját $(x_1 + x_{k+1}) x_2 \dots x_k$ alakba (ha $k = n$, akkor az alábbi algoritmus elejét értelemszerűen átugorjuk). Ha $x_1 > 0$, akkor legyen x_1 új értéke 0, x_2-é pedig (a régi) $x_1 + x_{k+1}$, ezzel S-ben az első két tag összege nem változott, a továbbiak pedig nem csökkentek (sőt általában nőttek, hiszen x_1 ott már nem szerepel, és x_{k+1} értékét növeltük). (3 pont)

Az (új) S első – ($x_1 = 0$ miatt most már) 0 értékű – tagját hagyjuk el, és ismételjük meg az eljárást a megmaradt első két tagra: $(x_2 + x_{k+2}) x_3 \dots x_{k+1}$-ben x_2-t cseréljük 0-ra, x_{k+2} pedig legyen a korábbi $x_2 + x_{k+2}$ összeg, ezzel S értéke ismét nem csökkent. Az eljárást mindaddig folytatjuk, amíg S-ben már csak egy tag marad. (1 pont)

Ekkor $S = x_{n-k+1} \dots x_n$, ahol $x_{n-k+1} + \dots + x_n = 1$. Mivel az összeg rögzített, ezért az $x_{n-k+1} \dots x_n$ szorzat a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján akkor maximális, ha mind a k tag egyenlő, azaz értékük $1/k$, és ekkor $S = 1/k^k$. Mivel beláttuk, hogy bármely x_i számokra legfeljebb ennyi az S értéke, ezért valóban ez a maximum. (2 pont)

3. feladat

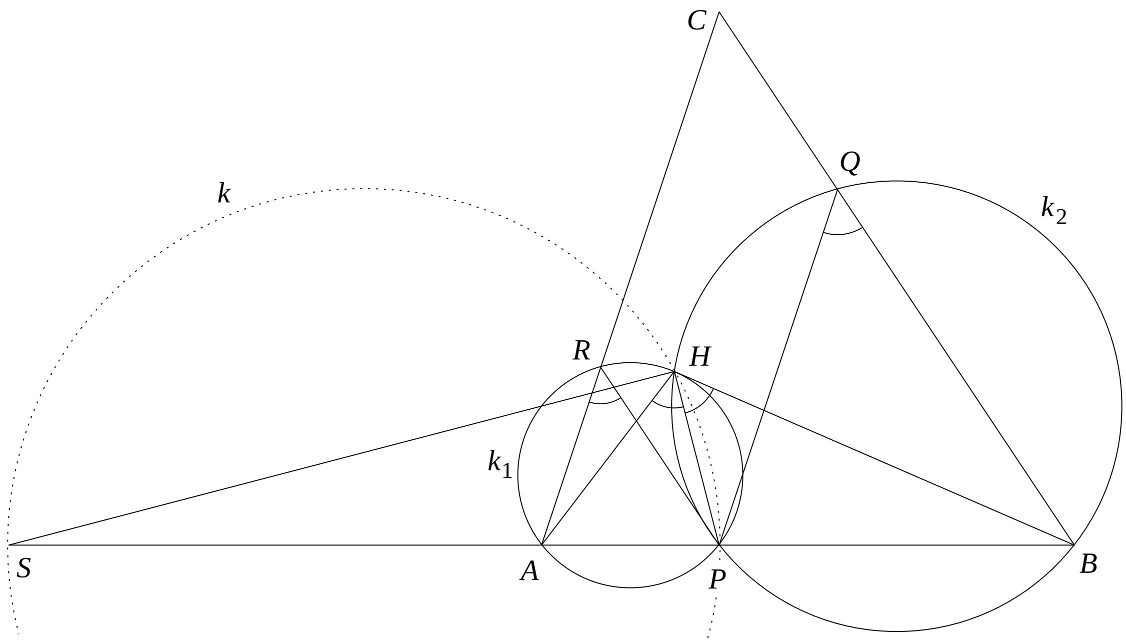
Rögzítsünk a síkon egy AB szakaszt és annak egy P belső pontját. Ha ABC tetszőleges háromszög, húzzunk P-ből párhuzamost az AC, illetve BC oldalakkal. Ezek az egyenesek a BC oldalt a Q pontban, az AC oldalt az R pontban metszik. Az APR és BPQ háromszögek köré írt körök P-től különböző metszéspontja legyen H. Mi a H pontok halmaza, ha a C pont a sík minden, az AB egyenesre nem illeszkedő pontján végigfut?

Első megoldás: Ha az ABC háromszögben C-nél hegyesszög van, akkor $AHP\sphericalangle = ARP\sphericalangle$ és $PHB\sphericalangle = PQB\sphericalangle$, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek az APR háromszög köré, illetve a PBQ háromszög köré írt körben. Emellett $ARP\sphericalangle = PQB\sphericalangle$, mert egyállású szögek. Így $AHP\sphericalangle = PHB\sphericalangle$, azaz HP felezi az AHB szöget. (1 pont)

Ha C-nél derékszög van, akkor a két kör érintkezik P-ben, és nem keletkezik a H pont. Ha pedig a háromszög tompaszögű a C csúcsában, akkor a két körnek félkörnél nagyobb ívei vannak az AB egyenesnek a C-vel átellenes félsíkjában, ezért a H metszéspont is ebbe a félsíkba kerül. Az AHP szög és a PHB szög ilyenkor $180°$-ra egészíti ki az egymással egyenlő ARP, illetve PQB szögeket, és ezért most is $AHP\sphericalangle = PHB\sphericalangle$, azaz HP belső szögfelező az ABH háromszögben. (1 pont)

A szögfelezőtétel alapján $AH : HB = AP : PB$. (1 pont)

Tegyük fel, hogy P nem az AB szakasz felezőpontja. Ekkor az ABH háromszög H-beli külső szögfelezője az AB egyenest metszi egy S-sel jelölt pontban. A külső szögfelezőre vonatkozó szögfelezőtétel alapján $AS : SB = AP : PB$ érvényes. Az $AP : PB$ arány a C csúcs választásától független és egyértelműen meghatározza az S külső pontot, ezért



bármely C mellett S ugyanaz a pont. A külső és a belső szögfelező merőleges, így H az SP szakaszra állított k Thalész-kör pontja. (A k körre az $AH : HB = AP : PB$ feltételből közvetlenül is ráismerhetünk mint az A és B alappontokhoz és ehhez az arányhoz tartozó Apollóniosz-körre.) (2 pont)

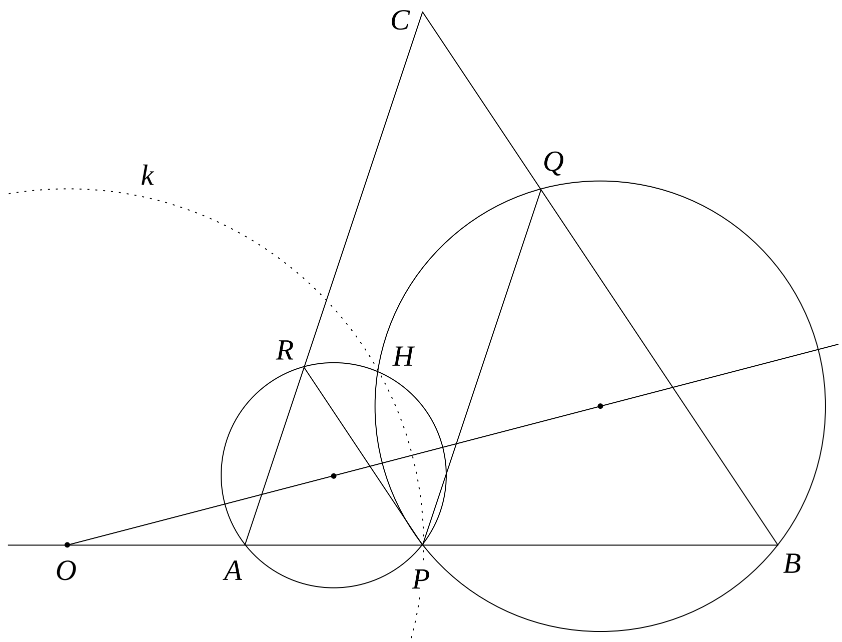
Megmutatjuk, hogy a k körnek bármely, S-től és P-től különböző pontját megkaphatjuk mint H-t alkalmas C választása mellett. Valóban, ha tetszőlegesen adott a $H \in k$, $H \neq S, P$ pont, akkor tekintsük az APH háromszög köré írt k_1 kört és a PBH háromszög köré írt k_2 kört, majd vegyünk föl k_1-en egy A-tól és P-től különböző tetszőleges R pontot. Húzzunk párhuzamost PR-rel a B ponton keresztül, ez az AR egyenesből C-t, a k_2 körből Q-t metszi ki. A kerületi szögek tulajdonságaiból következik, hogy ekkor PQ is párhuzamos AC-vel. (1 pont)

Ha a P pont az AB szakasz felezőpontja, akkor az $AH : HB = AP : PB$ egyenlőségből $AH = HB$ következik, tehát ilyenkor H az AB szakasz felező merőleges egyenesén van. Ennek az egyenesnek minden P-től különböző pontja elő is áll H-ként, ezt ugyancsak a fenti konstrukció mutatja. (1 pont)

Megjegyzés: A megoldásból kiolvasható, hogy a mértani hely mindegyik H pontját végtelen sok különböző C választásával is elő lehet állítani. Rögzített H mellett a hozzá tartozó C pontok azt a kört alkotják (az A és a B pont híján), amelyet az APH háromszög köré írt körből az A középpontú, AB/AP arányú nagyítással kapunk.

Második megoldás: Az APR háromszög és a PBQ háromszög párhuzamosan hasonló, tehát vagy egymás eltoltjai, vagy pedig középpontos hasonlóság van közöttük. (2 pont)

Ha P nem az AB szakasz felezőpontja, akkor a középpontos hasonlóság esete áll fenn. A hasonlóság O középpontja az AB egyenesre illeszkedik, és helyét A, P és B egyértelműen meghatározza C helyzetétől függetlenül. A körülírt köröket is ugyanez a hasonlóság kapcsolja össze, ezért O és a két kör középpontja kollineáris. Emiatt a H pont a P-nek egy O-n áthaladó tengelyre vonatkozó tükörképeként áll elő. Tehát H az O



középpontú, OP sugarú k körre illeszkedik. (3 pont)

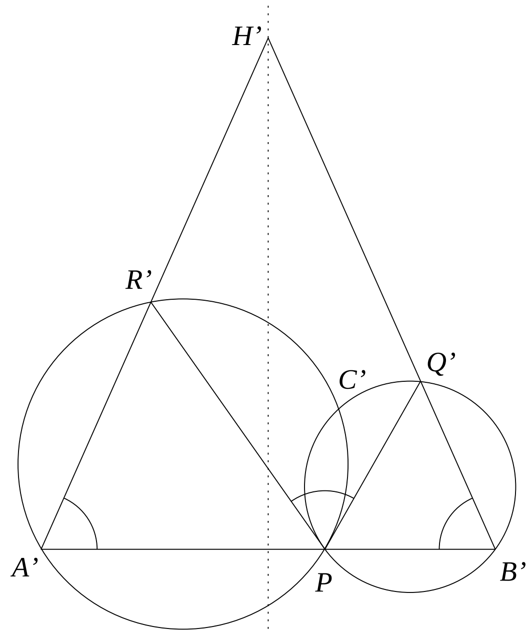
A k kör bármelyik, nem az AB egyenesen fekvő pontja elő is áll H-ként, hiszen ha adott egy ilyen H pont, az APH kör tetszőleges A-tól és P-től különböző pontját R-nek választva előállíthatjuk a Q pontot mint R képét a szóban forgó középpontos nagyítással, majd C-t AR és BQ metszéspontja szolgáltatja. (1 pont)

Ha P az AB szakasz felezőpontja, akkor a PBC háromszög az APR háromszögnek az $\overrightarrow{AP}$ vektorral történő eltolásával kapható. Ilyenkor a két körülírt kör egyenlő sugarú, és H a középpontjaikat összekötő, AB-vel párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözéssel áll elő P-ből. Ezért H az AB-re a P felezőpontban állított merőleges egyenesre illeszkedik. Ennek az egyenesnek az összes P-től különböző pontja hozzátartozik a keresett halmazhoz, hiszen ha ilyen H adott, akkor az előzőhöz hasonló eljárással (nagyítás helyett $\overrightarrow{AP}$ vektorral való eltolást alkalmazva) rekonstruálható a C pont. (1 pont)

Harmadik megoldás: Alkalmazzunk inverziót egy tetszőlegesen rögzített P középpontú körre vonatkozóan. Az A, B, stb. pontok inverzét rendre jelölje A', B', stb. Az inverziónál az ABC háromszög AB oldalegyenese az $A'B'$ egyenesbe, AC oldalegyenese az $A'PC'$ körbe, BC oldalegyenese pedig a $PB'C'$ körbe megy át. $PR \parallel BC$ miatt a PR' egyenes (amely a PR egyenessel azonos) a $PB'C'$ kör érintője a P pontban. Hasonlóképpen PQ' az $A'PC'$ kör érintője P-ben. Az APR kör inverze az $A'R'$ egyenes, a PBQ köré a $B'Q'$ egyenes. (2 pont)

A feladat inverzióval átfogalmazott változata tehát a következő: Adott az $A'B'$ szakasz P belső pontja. A sík egy az $A'B'$ egyenesre nem illeszkedő C' pontjával tekintsük az $A'PC'$ és a $PB'C'$ kör P-beli érintőjének a másik körrel vett, P-től különböző metszéspontját, így kapjuk a Q', illetve az R' pontot. Mi az $A'R'$ és a $B'Q'$ egyenes metszéspontjaként előálló H' pontok halmaza, amikor C' befutja a síkot (az $A'B'$ egyenes kivételével)? (1 pont)

A $Q'PR'$ szög érintőszárú kerületi szög mindkét körben, így a kerületi szögek tételét alkalmazva kapjuk, hogy az $A'B'H'$ háromszögben az A' csúcsban és a B' csúcsban egyenlő



szögek állnak. Ezért a H' pont az $A'B'$ szakasz felező merőlegesére illeszkedik. (2 pont)

Ennek a felező merőlegesnek minden, az $A'B'$ szakasz felezőpontjától különböző pontja elő is áll H'-ként. Adott H' mellett válasszunk ugyanis az $A'H'$ egyenesen egy tetszőleges, A'-től különböző R' pontot. Az $A'PR'$ körhöz P-ben húzott érintő nem lehet párhuzamos $B'H'$-vel, mert akkor az $A'B'H'$ háromszögből ezzel az érintővel levágott háromszög is egyenlő szárú volna, és ezért $A'H'$ is érintené a kört az A' pontban, ami lehetetlen. A P-beli érintő tehát metszi a $B'H'$ egyenest egy Q' pontban. Végül a C' pontot megkapjuk mint az $A'PR'$ kör és a $PB'Q'$ kör P-től különböző metszéspontját. Az érintőszárú kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján a $PB'Q'$ kör P-beli érintője áthalad R'-n, tehát ez a C' pont valóban az előírt H'-t származtatja. (1 pont)

Az eredeti feladatban keresett mértani helyet inverzióval kapjuk meg az $A'B'$ szakasz (felezőponttól megfosztott) felező merőlegeséből. Ha P felezi az AB szakaszt, akkor a mértani hely ugyanaz a felező merőleges a P pontja híján. Ha pedig P nem felezőpont, akkor a mértani hely az a P-n áthaladó kör (az AB egyenesen levő pontjai nélkül), amelyre vonatkozó inverzió A-t és B-t felcseréli, azaz az A és B alappontokhoz tartozó, P-n áthaladó Apollóniosz-kör. (1 pont)

4. feladat

Hány olyan, nem 0-ra végződő többszöröse van a 2012-nek, amelyben a számjegyek összege 5?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy végtelen sok ilyen többszörös van: alkalmas $k > 3$ értékekkel $c_k = 2 \cdot 10^k + 12$ megfelel. (2 pont)

$2012 \mid c_k$ pontosan akkor teljesül, ha $2012 \mid 2 \cdot 10^k - 2000 = 2000(10^{k-3} - 1)$. (1 pont)

Mivel $2012 = 4 \cdot 503$ és $4 \mid 2000$, ezért elég belátni, hogy $503 \mid 10^{k-3} - 1$ végtelen sok k-ra. (1 pont)

Ha egy ilyen $s = k - 3 > 0$-t találunk, akkor végtelen sokat is megadhatunk, mert bármely n-re ns is megfelel a $10^s - 1 \mid (10^s)^n - 1$ oszthatóság miatt. (1 pont)

Az $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{503}$ számok között a skatulyaelv miatt lesz két olyan, 10^i és 10^j $(0 \leq i < j \leq 503)$, amelyek azonos maradékot adnak 503-mal osztva, azaz $503 \mid 10^j - 10^i = 10^i(10^{j-i} - 1)$. Innen $(503, 10) = 1$ miatt $503 \mid 10^{j-i} - 1$ következik. (2 pont)

A befejezéshez használhattuk volna az Euler–Fermat tételt is: $503 \mid 10^{\varphi(503)} - 1 = 10^{502} - 1$ (mert az 503 prímszám).

Megjegyzés: Hasonlóan igazolható, hogy az $100\ldots01012$ alakú számok között is találunk végtelen sok alkalmasat: ha $503 \mid 10^s - 1$, akkor $10^{ns+3} + 1012$ megfelel.

5. feladat

Van 2012 külsőre teljesen egyforma, de páronként különböző értékű érménk. Ugyancsak van egy készülékünk, amelybe 21 érmét kell behelyezni, és megadja, hogy a 21 behelyezett érme közül melyik a k-adik legértékesebb. Ennek a készüléknek a segítségével a 2012 érme közül hánynak tudjuk meghatározni az érték szerinti sorszámát, ha **a)** $k = 10$, illetve ha **b)** $k = 11$?

Megoldás: Legyen először $k = 10$. A 2012 érme között van pontosan 20, az első (azaz legértékesebb) 9, valamint az utolsó 11, melyek egyike sem lehet egyetlen mérésben sem a 10-edik. Emellett az első 9 közül bármelyiket bármelyik másikkal kicserélve a mérés eredménye szükségképpen ugyanaz lesz, ezek között tehát nem tudunk különbséget tenni, így ezek sorszáma nem határozható meg. Ugyanez érvényes az utolsó 11-re is. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy a többi 1992 érme sorszáma meghatározható. Először kikeressük a 20 nem beazonosítható (a továbbiakban „szélső”) érmét. Ehhez beteszünk a készülékbe tetszőleges 21 érmét, az egyik kijön 10-ediknek, azt félretesszük, majd a maradék 2011-ből teszünk be 21-et és az eljárást addig ismételjük, amíg csak 20 érménk marad, melyek nem voltak egyetlen korábbi mérés eredményei sem: ez lesz a 20 szélső érme. (1 pont)

Vegyünk most ki két érmét a többi $2012 - 20$ közül, a kevésbé értékes legyen x, az értékesebb y, persze nem tudjuk, hogy közülük melyik x, és melyik y. Tegyük be a készülékbe x-et, y-t és a 20 szélső érme közül 19-et. Közülük az érték szerinti 10-edik x lesz, ha a kimaradt érme a sor elején van, és y lesz, ha a kimaradt érme a sor végén van. Így a 20 lehetséges mérés közül 9 alkalommal fogjuk x-et kapni mint tizediket, és 11 alkalommal y-t. Innen már tudjuk, hogy e két érme közül melyik az értekesebb. (Egyúttal azt is megtudtuk, hogy a 20 félretett érme közül melyik a sor elején álló 9, és melyik a sor végén álló 11.) Mivel így a $2012 - 20$ nem szélső érme közül bármely kettő közül kiválaszthatjuk, melyik az értékesebb, ebből meghatározhatjuk ezek (10-től 2001-ig terjedő) érték szerinti sorszámát. (2 pont)

Most belátjuk, hogy $k = 11$ esetén egyetlen érme sorszámát sem tudjuk megállapítani: a j-edik és $(2013 - j)$-edik érmét nem tudjuk így különválasztani. Ha ugyanis teljesen megfordítjuk az értéksorrendet, akkor bármely 21 érme közül a 11-edik, azaz a középső, ugyanaz lesz, mint az eredeti sorrendben volt. (3 pont)

(Az előző részhez hasonló gondolatmenettel megmutatható, hogy ezeknek a pároknak az együttes sorszámai $2003 > j > 10$-re már beazonosíthatók, csak azt nem lehet megállapítani, hogy egy páron belül melyik az értékesebb érme.)