Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2012–13-as tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapján vegyünk fel egy P pontot. P-ből merőlegeseket állítunk a két szár egyenesére, ezek talppontjai I, illetve J. A háromszög magasságpontját jelölje M. Mutassuk meg, hogy a PM egyenes áthalad az IJ szakasz felezőpontján.

2. Legyenek $1 \le k \le n$ rögzített egészek. Mennyi az
$$x_1x_2\dots x_k + x_2x_3\dots x_{k+1} + \dots + x_{n-k+1}x_{n-k+2}\dots x_n$$
kifejezés maximuma, ha $x_1, \dots, x_n$ nemnegatív számok és összegük 1?

3. Rögzítsünk a síkon egy AB szakaszt és annak egy P belső pontját. Ha ABC tetszőleges háromszög, húzzunk P-ből párhuzamost az AC, illetve BC oldalakkal. Ezek az egyenesek a BC oldalt a Q pontban, az AC oldalt az R pontban metszik. Az APR és BPQ háromszögek köré írt körök P-től különböző metszéspontja legyen H. Mi a H pontok halmaza, ha a C pont a sík minden, az AB egyenesre nem illeszkedő pontján végigfut?

4. Hány olyan, nem 0-ra végződő többszöröse van a 2012-nek, amelyben a számjegyek összege 5?

5. Van 2012 külsőre teljesen egyforma, de páronként különböző értékű érménk. Ugyancsak van egy készülékünk, amelybe 21 érmét kell behelyezni, és megadja, hogy a 21 behelyezett érme közül melyik a k-adik legértékesebb. Ennek a készüléknek a segítségével a 2012 érme közül hánynak tudjuk meghatározni az érték szerinti sorszámát, ha a) $k = 10$, illetve ha b) $k = 11$?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.