Oktatási Hivatal

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2012-2013. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Az f függvény értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza és a függvény értékei is pozitív egészek. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amelyre teljesül, hogy minden pozitív egész n szám esetén

$$\sum_{i=1}^{n} f^3(i) = f^3(1) + f^3(2) + ... + f^3(n) = (f(1) + f(2) + ... + f(n))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right)^2$$

Megoldás: Ismeretes, hogy

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Ezért a pozitív egészeken értelmezett $f(n) = n$ függvény megfelel a feladat feltételeinek.

1 pont

Megmutatjuk, hogy nincs más megoldása a feladatnak. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden pozitív egész n-re $f(n) = n$. Kezdő lépés: ha $n = 1$, akkor $f^3(1) = f^2(1)$, mivel $f(1)$ pozitív egész, ezért leoszthatunk $f^2(1)$-gyel és így kapjuk, hogy $f(1) = 1$.

1 pont

Indukciós lépés: tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, ennek segítségével megmutatjuk, hogy igaz $n + 1$-re is. Legyen $f(n + 1) = a$. Az indukciós feltevés miatt

$$f^3(1) + f^3(2) + ... + f^3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{és} \quad f(1) + f(2) + ... + f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ezeket írjuk be a feladat szövegében megadott feltételbe

$$f^3(1) + f^3(2) + ... + f^3(n) + f^3(n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + a^3 =$$

$$= (f(1) + f(2) + ... + f(n) + f(n+1))^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} + a\right)^2$$

azaz

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + a^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} + a\right)^2$$

3 pont

Az egyenlet jobb oldalán elvégezzük a négyzetreemelést, majd mindkét oldalból kivonunk $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$-t.

$$a^3 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot a + a^2$$

Mivel a pozitív egész, oszthatunk vele. A kapott másodfokú egyenlet gyökei $a_1 = n+1$ és $a_2 = -n$. Mivel a függvény értéke a feladat feltétele szerint csak pozitív egész lehet, azért a_2 nem megfelelő. Azonos átalakításokat végeztünk, nem kaphattunk hamis gyököt és gyököt sem veszíthettünk, eyetlen megoldásunk az $a = n+1$. Az indukciós lépést befejeztük, igazoltuk, hogy $f(n+1) = n+1$ és ezzel igazoltuk, hogy a feladat feltételének egyetlen függvény tesz eleget, az $f(n) = n$.

2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az ABC háromszög CA, AB és BC oldalainak belső pontjai rendre B_1, C_1 és A_1, amelyekre

$$\frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{BA_1}{BC} = \lambda < \frac{1}{2}$$

Az AA_1 és BB_1 szakaszok metszéspontja P, BB_1 és CC_1 metszéspontja Q és CC_1 és AA_1 metszéspontja R.

Ha az ABC háromszög területe T, a PQR háromszög területe t, akkor $T : t = 13 : 4$ esetén mekkora λ értéke?

Megoldás: Legyen B_2 a BC oldal azon pontja, amelyre B_1B_2 párhuzamos AB-vel. Legyen A_2 a BB_1 szakasz azon pontja, amelyre A_1A_2 párhuzamos AB-vel. A feladatban megadott arányt használva az $ACB\angle$ szögre és a párhuzamos AB és B_1B_2 szelőkre kapjuk, hogy $B_1B_2 = \lambda AB$ és $CB_2 = \lambda BC$. Használjuk most a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $B_1BB_2\angle$ szögre és a B_1B_2 továbbá A_1A_2 szelőkre, ekkor $A_1A_2 : B_1B_2 = BA_1 : BB_2 = \lambda : (1-\lambda)$. Az eddigiek alapján $A_1A_2 = \lambda AB\frac{\lambda}{1-\lambda}$. 2 pont

Az ABA_1 és ABC háromszögek A-hoz tartozó magassága azonos, ezért területük aránya megegyezik az alapok arányával, ebből $T_{ABA_1} = \lambda \cdot T$. 1 pont

Az ABP és A_1A_2P háromszögek oldalai párhuzamosak, tehát hasonlók, $AP : PA_1 = AB : A_1A_2$. Az ABA_1 és ABP háromszögek B-hez tartozó magassága azonos, ezért területük aránya megegyezik az alapok arányával, ebből

$$T_{ABP} = \frac{AB}{AB + A_1A_2} T_{ABA_1} = \frac{AB}{AB + \lambda AB\frac{\lambda}{1-\lambda}} \lambda \cdot T \tag{1}$$

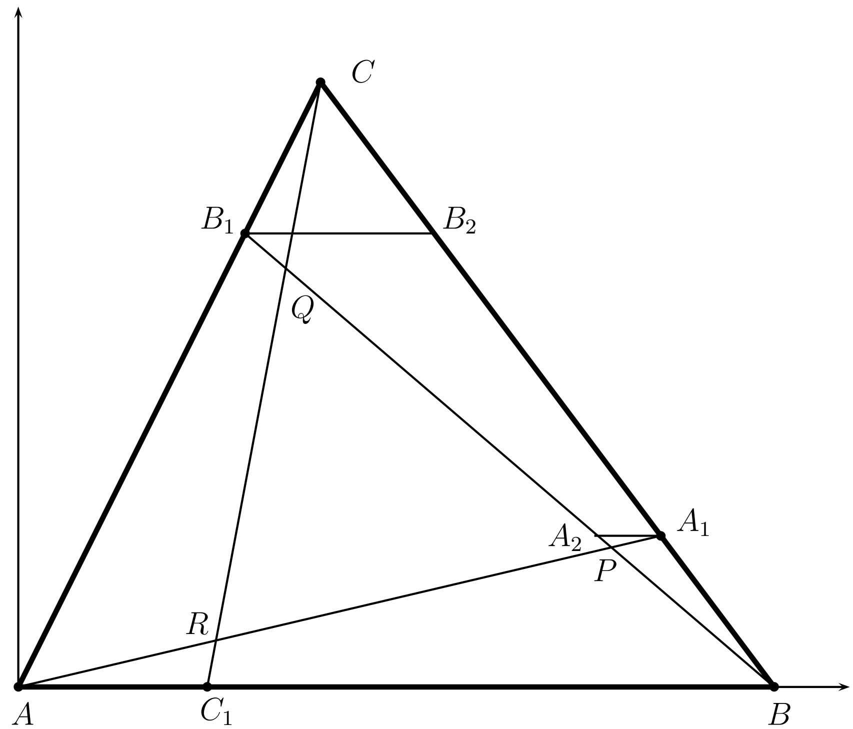
2 pont

A kapott kifejezésben AB-vel egyszerűsíthetünk, tehát ABP területének aránya T-hez csak λ-tól függ. Ugyanez az arány adódik ezek szerint a BQC és CAR háromszögekre is. A feladat szövege szerint $T : t = 13 : 4$. Az ABC háromszög területéből kivonva a PQR háromszög területét és a megmaradt részt három egyenlő részre osztva adódik, hogy $T : T_{ABP} = T : T_{BCQ} = T : T_{CAR} = 13 : 3$. 1 pont

Ezt írjuk be (1)-be:

$$\frac{3}{13} = \frac{1}{1+\lambda\frac{\lambda}{1-\lambda}}\lambda = \frac{\lambda(1-\lambda)}{1-\lambda+\lambda^2}$$

Ebből a következő másodfokú egyenletet kapjuk $16\lambda^2 - 16\lambda + 3 = 0$, aminek megoldásai $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ és $\lambda_2 = \frac{3}{4}$. A feladatban megadott $\lambda < \frac{1}{2}$ feltétel miatt a feladatnak egyetlen megoldása van a $\lambda = \frac{1}{4}$. 1 pont



Összesen: 7 pont

A feladat vektorokkal, vagy koordináta-geometiával is megoldható. Ez utóbbi menetének egy lehetséges vázlata: Legyen $A(0;0)$, $B(b;0)$ és $C(c;d)$. Ekkor a $\lambda : (1-\lambda)$ arányú osztópontok:

$$C_1(\lambda b; 0) \quad A_1(\lambda c + (1-\lambda)b; \lambda d) \quad B_1((1-\lambda)c; (1-\lambda)d)$$

1 pont

Az AA_1 egyenes egyenlete

$$y = \frac{\lambda d}{\lambda c + (1-\lambda)b}x$$

A BB_1 egyenes egyenlete:

$$y = \frac{(1-\lambda)d}{(1-\lambda)c - b}(x-b)$$

2 pont

Ezek metszete P. Az egyenletrendszer megoldásaként P koordinátái:

$$x = \frac{(1-\lambda)(\lambda c + (1-\lambda)b)}{1-\lambda+\lambda^2} \quad y = \frac{\lambda(1-\lambda)d}{1-\lambda+\lambda^2}$$

2 pont

Innentől a területekre teljesülő alábbi feltételből kapjuk a $\lambda = \frac{1}{4}$ megoldást:

$$T_{ABP} = \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}bd\frac{\lambda(1-\lambda)}{1-\lambda+\lambda^2} = T \cdot \frac{\lambda(1-\lambda)}{1-\lambda+\lambda^2}$$

2 pont

3. Egy táncesten n lány és 4 fiú vett részt. Páros táncokat táncoltak, egy párban mindig egy fiú és egy lány volt, de a táncpartnerek cserélődhettek. Legalább mekkora n, ha a táncolás után biztosan kiválasztható vagy két lány és két fiú úgy, hogy a közülük alakítható összes lehetséges párosításban táncoltak az est folyamán, vagy úgy, hogy semelyik párosításban sem táncoltak?

Megoldás: A fiúkat jelölje A, B, C és D. A táncest végeztével minden lány egy piros cédulára ráírhat két fiút, ha mindkettővel táncolt. Egy kék cédulára ráírhat két fiút, ha egyikkel sem táncolt. A feladat szövegében szereplő feltétel éppen azt jelenti, hogy találunk két lányt, akiknek van ugyanolyan színű és feliratú cédulája. 1 pont

Minden lány ki tud tölteni legalább két különböző cédulát. Ha egyikük négy fiúval táncolt, akkor lehet két piros cédulája az A, B és C, D párokkal. Ha hárommal táncolt (pl A, B, C-vel és D-vel nem), akkor lehet két piros cédulája A, B és A, C. Ha két fiúval táncolt, kettővel nem, akkor egy piros és egy kék cédulája lesz. Ha három fiúval, vagy négy fiúval nem táncolt, akkor két kék cédulát kitölthet, az előzőek mintájára. A továbbiakban tehát minden lányt kérünk, töltsön ki két különböző cédulát. 2 pont

Négy fiúból 6-féle pár választható ki, kétféle szín van, ez összesen 12 lehetőség. Így ha a lányok száma legalább 7, akkor lesz legalább 14 cédula és ezek közt lesz két azonos. Az azonos cédulákat készítő két lány és a céduláikon szereplő két fiú megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

6 lány esetén viszont megszervezhető a táncolás úgy, hogy minden lány pont két fiúval táncol és kettővel nem. Ekkor minden lány pontosan két cédulát tölthet ki. Ha a két táncpartner minden lánynál más, nem lesz két azonos cédula, nem lehet a feladat feltételének megfelelően választani két lányt és két fiút. A lányokat 1-6-ig számozva egy lehetséges táncbeosztás: 1. táncolt A, B-vel, 2. táncolt A, C-vel, 3. táncolt A, D-vel, 4. táncolt B, C-vel, 5. táncolt B, D-vel, végül a 6. táncolt C, D-vel. 3 pont

Összesen: 7 pont