Oktatási Hivatal

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2012-2013. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára

1. Az f függvény értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza és a függvény értékei is pozitív egészek. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amelyre teljesül, hogy minden pozitív egész n szám esetén

$$\sum_{i=1}^{n} f^3(i) = f^3(1) + f^3(2) + ... + f^3(n) = (f(1) + f(2) + ... + f(n))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right)^2$$

Itt a szokásos jelölés szerint $f^3(k) = (f(k))^3$, azaz az f függvény k helyen felvett értékének köbe.

2. Az ABC háromszög CA, AB és BC oldalainak belső pontjai rendre B_1, C_1 és A_1, amelyekre

$$\frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{BA_1}{BC} = \lambda < \frac{1}{2}$$

Az AA_1 és BB_1 szakaszok metszéspontja P, BB_1 és CC_1 metszéspontja Q és CC_1 és AA_1 metszéspontja R.

Ha az ABC háromszög területe T, a PQR háromszög területe t, akkor $T : t = 13 : 4$ esetén mekkora λ értéke?

3. Egy táncesten n lány és 4 fiú vett részt. Páros táncokat táncoltak, egy párban mindig egy fiú és egy lány volt, de a táncpartnerek cserélődhettek. Legalább mekkora az n, ha a táncolás után kiválasztható vagy két lány és két fiú úgy, hogy a köztük lehetséges összes párosításban táncoltak az est folyamán, vagy úgy, hogy egymással semelyik párosításban sem táncoltak?

Minden feladat 7 pontot ér.