Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2012-2013. tanévi második fordulójának feladatmegoldásai matematikából, a II. kategória számára

1. Bizonyítsuk be, ha egy pozitív egész szám első és utolsó jegyének különbsége 5, akkor e szám és jegyeinek fordított sorrendjével felírt szám különbsége osztható 45-tel.

Megoldás: Legyen a szám A, a jegyeinek fordított sorrendjével felírt szám B. Feltehetjük, hogy $A > B$.

$$A = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$$

$$B = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + ... + a_{n-1} 10 + a_n$$

1 pont

$$A - B = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 10) + ... + a_1(10 - 10^{n-1} + a_0(1 - 10^n) =$$

$$= (a_n - a_0)(10^n - 1) + 10 \Big[a_{n-1}(10^{n-2} - 1) + a_{n-2} \cdot 10(10^{n-4} - 1) + ...$$

$$+ a_2 \cdot 10(1 - 10^{n-4}) + a_1(1 - 10^{n-2})$$

3 pont

$a_n - a_0 = 5$, $10^n - 1$ osztható 9-cel, a szögletes zárójelben lévő minden tag szintén osztható 9-cel, 10-szerese osztható 90-nel, tehát $A - B$ osztható 45-tel. 3 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy 10 egység oldalú szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos egyenesekkel egységnyi oldalú szabályos háromszögekre bontottunk fel. Hány olyan szabályos háromszög van, amelynek csúcsai a létrejött szabályos háromszög-rács rácspontjai?

Megoldás: Legyen a kiinduló háromszög oldalhossza n és ezen paraméter segítségével oldjuk meg a feladatot, majd a végén meghatározzuk $n = 10$ esetén a feladat kérdésére a választ. Tekintsük azokat az eredetivel egyállású szabályos háromszögeket, amelyek oldalai a nagy háromszög oldalaival párhuzamosak. A "legfelül" lévő csúcs adott k oldalhossz mellett ezek számát minden sorban egyértelműen meghatározza. A "legfelsőtől" indulva 1, majd soronként egyesével növekedve eljutunk a "legalsóig", ahol $n - k + 1$.

Így összesen

$$1 + 2 + ... + (n - k + 1) = \frac{(n - k + 1)(n - k + 2)}{2}$$

van belőlük. 2 pont

Egy k oldalhosszúságú, az eredetivel egyállású szabályos rácsháromszög k számú olyan ponthármast határoz meg a kerületén, amelyekben a rácspontok szabályos háromszöget alkotnak. Így az összes szabályos háromszögek száma:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)(n-k+2) \tag{1}$$

2 pont

Tekintsük a következő átalakításokat:

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)(n-k+2) = \sum_{k=1}^{n}\Big(k^3-(2n+3)k^2+(n+1)(n+2)k\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 - (2n+3)\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)(n+2)\sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - (2n+3)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)(n+2)\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}$$

A megfelelő szabályos háromszögek száma ezért

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = \binom{n+3}{4}$$

2 pont

A feladatban feltett kérdésre tehát $n=10$ esetén a válasz $\binom{13}{4} = 715$. 1 pont

Összesen: 7 pont

(1) után lehetséges a következő befejezés is:

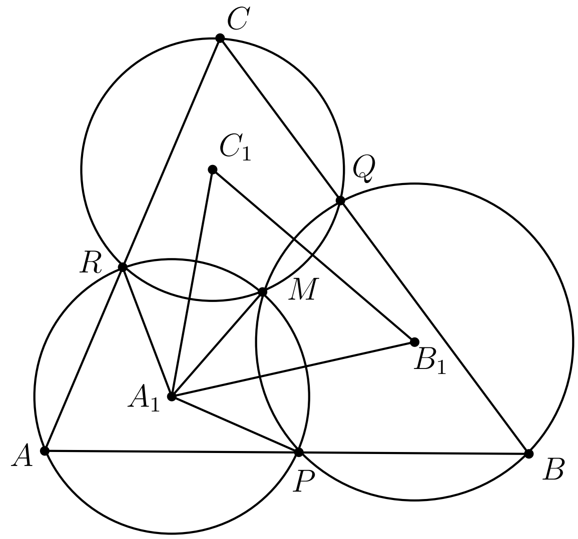
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)(n-k+2) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n-k+2}{2}$$

Ez az összeg azt adja meg, hogy az $1, 2, \ldots, (n+3)$ számok közül hányféleképpen választhatunk ki 4-et. A megszámlálás a szerint történt, hogy a kiválasztott $a<b<c<d$ számok közül mekkora a b. Ha $b=k+1$, akkor a az előtte álló k szám bármelyike lehet, c és d pedig az utána következő $(n-k+2)$ szám közül lehet bármely kettő. Ezek szorzata éppen a szummában álló összeg egy megfelelő tagja. A leszámolás eredménye ezért $\binom{n+3}{4}$.

3. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalain adottak rendre a P, Q és R pontok. Igazoljuk, hogy az APR, BPQ és CQR háromszögek köré írt körei középpontjai által meghatározott háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.

Megoldás: Legyen az APR és BPQ háromszögek köré írt körök P-től különböző metszéspontja M. Mivel $APMR$ húrnégyszög, ezért $PMR\angle = 180^\circ - \alpha$, hasonlóan $QMP\angle = 180^\circ - \beta$. Ebből következik, hogy $RMQ\angle = 180^\circ - \gamma$, azaz M rajta van a CQR háromszög köré írt körön. 2 pont

A megoldás végén diszkutáljuk M pont helyzetét, mivel az lehet az ABC háromszög belső, vagy külső pontja is. 1 pont



Jelölje a APR, BPQ és CQR háromszögek köré írt körei középpontjait A_1, B_1 és C_1. A középponti és kerületi szögek tételéből következik, hogy $PA_1R\angle = 2\alpha$. Másrészt

$$PA_1R\angle = PA_1M\angle + MA_1R\angle = 2B_1A_1M\angle + 2MA_1C_1\angle = 2B_1A_1C_1\angle$$

2 pont

Azt kaptuk, hogy $B_1A_1C_1\angle = \alpha$ és ugyanilyen érveléssel adódik, hogy $C_1B_1A_1\angle = \beta$, $A_1C_1B_1\angle = \gamma$. Ezzel igazoltuk, hogy $A_1B_1C_1$ hasonló az ABC háromszöghöz. 1 pont

Ábránkon az M pont az ABC háromszög belsejében van. Ha a háromszögön kívül esik, a bizonyítás a fentiekhez hasonló módon történik. (A fenti bizonyítás irányított szögekkel erre az esetre is megfelelő.) Azért az észrevételért, hogy M lehet belső és külső pont a megoldás elején járt 1 pont. A diszkutálás végén szereplő további 1 pont akkor jár, ha leírja külső M pont esetén a bizonyítást, vagy utal rá, hogy irányított szögekkel bizonyítása érvényes. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{2012+\sqrt{2011+\sqrt{2010+\sqrt{....+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}} < 46$$

Megoldás: Legyen $P(n) = \sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\sqrt{(n-2)+\sqrt{....+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}$. Induktív úton igazoljuk: ha $n < 2070$, akkor $P(n) < 46$. $P(n)$ értékét felülről becsüljük, ha az 1 helyett 46^2-t, az összes többi szám helyett 2070-et írunk. 3 pont

Kezdő lépésként ellenőrizzük $n = 1, 2, 3$-ra az állítást:

$$P(1) = \sqrt{1} < \sqrt{46^2} = 46$$

$$P(2) = \sqrt{2+\sqrt{1}} < \sqrt{2070+\sqrt{46^2}} = \sqrt{2116} = 46$$

$$P(3)=\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}<\sqrt{2070+\sqrt{2070+\sqrt{46^2}}}=46$$

1 pont

Az indukciós lépésben feltesszük hogy $P(k)<46$, ahol $k<2069$, és ennek segítségével megmutatjuk, hogy $P(k+1)<46$.

$$P(k+1)=\sqrt{(k+1)+\sqrt{k+\sqrt{(k-1)+....+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}=$$

$$=\sqrt{(k+1)+P(k)}<\sqrt{2070+46}=46$$

Mivel $2012<2070$ így indukciós bizoyításunk a feladatban kitűzött egyenlőtlenségre érvényes, a bizonyítást befejeztük. 3 pont

Összesen: 7 pont