Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2012-2013. tanévi első fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Mely x és y valós számok elégítik ki a $\sqrt{x} = 2 - y$, $\sqrt{y} = x - 2$ egyenletrendszert?

Megoldás: A gyök alatt nem állhat negatív szám, ezért $x \geq 0$ és $y \geq 0$. A gyökös kifejezés értéke nem lehet negatív, ezért $2 - y \geq 0$, azaz $2 \geq y$. A másik egyenletből $x \geq 2$ adódik. 1 pont

A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

Mivel $y \geq 0$ és $x \geq 2$, ezért $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$, oszthatunk vele. 1 pont

$$1 = \sqrt{x} - \sqrt{y} \tag{1}$$

1 pont

Ebből kifejezzük $\sqrt{x}$-et és behelyettesítjük a feladatban kitűzött első egyenletbe

$$1 + \sqrt{y} = 2 - y$$

Ez $\sqrt{y}$-ra egy másodfokú egyenlet, melynek megoldásai $\sqrt{y_1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{y_2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
1 pont

Gyökös kifejezés nem lehet negatív, $\sqrt{y_2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ nem ad valós megoldást. 1 pont

Az egyetlen gyökpárt y_1-ből (1) egyenlet segítségével kapjuk:

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$ 1 pont

Ellenőrzésként a gyököket az eredeti egyenletrendszerbe helyetesítve kapjuk, hogy azok valóban megoldások. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy négyzetet az egyik csúcsából induló két egyenes három egyenlő területű részre oszt.

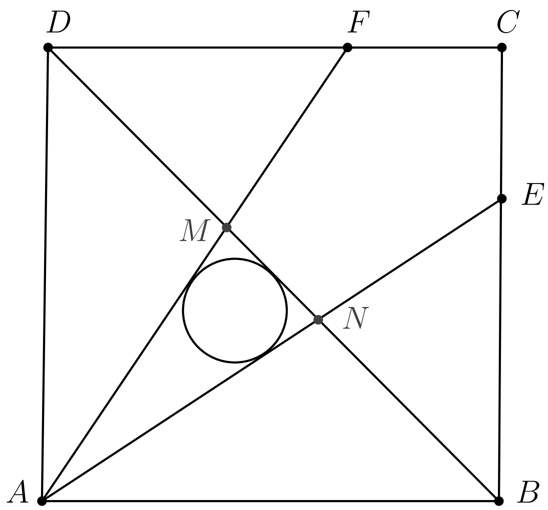
(a) Milyen arányú részekre osztja a két egyenes négyzetbe eső szakaszát a szakaszokat metsző átló?

(b) Legyen a négyzetbe írt kör területe T, a két egyenes és az őket metsző átló által bezárt háromszög beírt körének területe t. Határozzuk meg $T : t$ értékét.

Megoldás: (a) Használjuk az ábra jelöléseit. Legyen a négyzet oldala egységnyi. Ekkor az AFD háromszög területe a feladat szövege alapján $\frac{1}{3}$, másrészt a terület $\frac{AD \cdot DF}{2}$, amiből $DF = \frac{2}{3}$. 1 pont

Az ABM és FDM háromszögeket vizsgálva M-nél levő szögeik csúcsszögek, $ABM\angle = FDM\angle$ mivel váltószögek. Ezek szerint ABM és FDM hasonlók. 1 pont

A megfelelő oldalak arányát felírva $\frac{DF}{AB} = \frac{FM}{AM} = \frac{2}{3}$. Az ábra szimmetrikus az AC átlóra, ezért a másik egyenesre eső szakaszoknál is ugyanezt az arányt kapjuk, $\frac{EN}{AN} = \frac{2}{3}$. 1 pont



(b) ABM és FDM hasonlósága miatt $\frac{DM}{MB} = \frac{FM}{AM} = \frac{2}{3}$, amiből $DM = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{2} = NB$, és így $MN = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{2}$ 1 pont

Az AMN háromszögben az MN oldalhoz tartozó magasság a négyzet átlójának fele, így a háromszög területe

$$T_{AMN} = \frac{\frac{1}{5}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{10}$$ 1 pont

Az AMN háromszög beírt körének sugarát jelölje r. Használjuk a $T_{AMN} = r\cdot s$ területképletet, ahol s a kerület fele. $AM = NA = AF\cdot\frac{3}{5} = \sqrt{1+(\frac{2}{3})^2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{\sqrt{13}}{5}$ miatt

$$T_{AMN} = \frac{1}{10} = r\cdot\frac{\frac{2\sqrt{13}}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{2}}{2} \quad \text{amiből} \quad r = \frac{1}{2\sqrt{13}+\sqrt{2}}$$ 1 pont

A körök területeinek aránya sugaraik arányának négyzetével egyenlők

$$T : t = \frac{1}{4} : \frac{1}{54+4\sqrt{26}} = \frac{27+2\sqrt{26}}{2} \approx 18.599$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Hányféleképpen juthatunk a koordinátarendszer origójából a (4;2) pontba, ha 10 lépést teszünk, minden lépésünk egységnyi hosszú és párhuzamos a tengelyek valamelyikével?

Megoldás: Jelöljük lépéseinket az égtájaknak megfelelő betűkkel: az x tengellyel párhuzamos pozitív irányú legyen K, negatív N; az y tengellyel párhuzamos pozitív irányú legyen $É$, negatív D. A 10 lépést a megfelelő betűkkel írjuk le.

A feladatban kitűzött (4;2) ponthoz úgy juthatunk, ha 4-gyel több K lépésünk van, mint N és kettővel több $É$, mint D. 1 pont

Mivel összesen 10 lépést teszünk, a különböző irányokra jutó lépések száma következő lehet ($x - K$ azt jelenti, hogy x darab lépést teszünk K irányba):

(i) $4 - K$, $0 - N$, $4 - É$, $2 - D$;

(ii) $5 - K$, $1 - N$, $3 - É$, $1 - D$;

(iii) $6 - K$, $2 - N$, $2 - É$, $0 - D$. 2 pont

Az (i) esetben a 10 lépésből kiválasztjuk azt a 4-et, amelyik K irányú, ez lehet $\binom{10}{4}$ féle. A maradék 6 lépésből kiválasztjuk a 4 $É$ irányút, ez lehet $\binom{6}{4}$ féle. Egymástól függetlenek a választásaink, ezért az esetek száma $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} = 3150$. 1 pont

Hasonló módon kapjuk az (ii) esetben a lehetséges utak számát, amely $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3} = 5040$. Az (iii) esetben pedig $\binom{10}{6} \cdot \binom{4}{2} = 1260$. 1+1 pont

A megoldások számát a három esetben kapott eredmények összegéből kapjuk, ami 9450. 1 pont

Összesen: 7 pont

Ismétléses permutáció felhasználásával is érvelhetünk. Pl. (i) esetén 4 darab K, 4 darab $É$ és 2 darab D betűből készíthető jelsorozatok száma

$$\frac{10!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 3150$$

4. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + ... + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$$

Megoldás: A bal oldalon levő összeg tagjait vizsgálva $\frac{\sqrt{6}}{5} < \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{20}}{9} < \frac{1}{2}$. 1 pont

Ezek alapján azt sejtjük, hogy minden tag kisebb lesz $\frac{1}{2}$-nél. Sejtésünket igazoljuk, használjuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget a $2n$ és $2n + 1$ számokra

$$\sqrt{2n(2n+1)} \leq \frac{2n + 2n + 1}{2}$$

amiből

$$\frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} \leq \frac{1}{2}$$

4 pont

Mivel a számtani-mértani középben szereplő két szám különböző, ezért a $\leq$ jel helyett írhatunk $<$ jelet is. 1 pont

Az egyenlőtlenség bal oldalán éppen n darab tag van, ezek mindegyike kisebb $\frac{1}{2}$-nél, így a bizonyítandó egyenlőtlenséget beláttuk. 1 pont

Összesen: 7 pont

Bizonyításunkat leírhatjuk teljes indukcióval is. Az indukciós lépésben n-ről $n + 1$-re lépve a bal oldal egy újabb taggal, a jobb oldal $\frac{1}{2}$-del nő.

$$\frac{\sqrt{2(n+1)(2n+3)}}{4n+5} < \frac{1}{2}$$

Beszorzás és négyzetreemelés után $16n^2 + 40n + 24 < 16n^2 + 40n + 25$. Mivel ekvivalens átalakítással igaz egyenlőtlenséghez jutottunk, a bizonyítandót beláttuk.

5. Igazoljuk, hogy a rekurzióval definiált alábbi sorozat minden tagja pozitív egész szám.

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot c_n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Megoldás: A sorozat első néhány tagja: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 5$, $c_5 = 14$, $c_6 = 42$, ... Ezek valóban mind pozitív egészek. A rekurziós szabály szerint a soron következő tagot az előzőből pozitív számmal való szorzással kapjuk ezért a sorozat minden tagja pozitív lesz. 1 pont

A rekurzív összefüggés alapján

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= \frac{2 \cdot 1}{2} c_1 \\ c_3 &= \frac{2 \cdot 3}{3} c_2 \\ &\vdots \\ c_{n+1} &= \frac{2 \cdot (2n-1)}{n+1} c_n \end{aligned}$$

A megfelelő oldalak összeszorzása, valamint a mindkét oldalon szereplő közös tényezőkkel való leosztás után:

$$c_{n+1} = \frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n-1) \cdot 2n}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

3 pont

Innen két befejezést is megadunk, mindkettőben kihasználjuk, hogy a binomiális együtthatók egész számok.

1. Elegendő megmutatnunk, hogy $(n+1)$ osztója $\binom{2n}{n}$-nek. Használjuk ki, hogy

$$\binom{2n+1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

Mivel $2n+1 = 2(n+1) - 1$, ezért $2n+1$ és $n+1$ relatív prímek, tehát $n+1$ osztója $\binom{2n}{n}$-nek.

2.

$$\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{n+1-n}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Elegendő belátni, hogy $\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$ egész, ami az alábbi sorból következik:

$$\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot (n-1)!} = \binom{2n}{n+1}$$

3 pont

Összesen: 7 pont