Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2012/2013

Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Döntő

Megoldások

1. Egy papírlapra felírtuk a pozitív egész számokat n-től $2n$-ig. Azt vettük észre, hogy a felírt páros számok összege 2013-mal nagyobb, mint a felírt páratlan számok összege.

Mettől meddig írtuk fel a számokat?

<u>1. Megoldás:</u>

n-től $2n$-ig $2n-n+1=n+1$ darab pozitív egész szám van.

Két esetet kell megkülönböztetnünk: n páros, vagy páratlan. 1 pont

a) Legyen először n páros, azaz $n=2k$, ahol $k\in N^{+}$.

Ekkor a papírlapra felírt számok a következők:

(1) $$2k,\, 2k+1,\, 2k+2,\dots,4k-1,\, 4k,$$

közülük a párosak:

$$2k,\ 2k+2,\dots,\ 4k.$$

Ezek a számok számtani sorozatot alkotnak, a sorozat differenciája 2, tagjainak száma $k+1$.

A számtani sorozat összegképlete szerint ekkor a páros számok összege:

$$S_1=\frac{2k+4k}{2}\cdot(k+1),$$

azaz egyszerűsítés után

$$S_1=3k\cdot(k+1),$$

(2) $$S_1=3k^2+3k.$$ 2 pont

Az (1)-ben szereplő számok közül a páratlan számok:

$$2k+1,\ 2k+3,\dots,\ 4k-1.$$

Ez is 2 differenciájú számtani sorozat, melyben a tagok száma k, így az összegük:

$$S_2 = \frac{2k+1+4k-1}{2} \cdot k,$$

vagyis

(3) $$S_2 = 3k^2.$$ 1 pont

A feladat feltétele szerint

$$S_1 - S_2 = 2013,$$

ebből pedig (2) és (3) alapján

$$3k = 2013,$$

azaz

(4) $$k = 671.$$ 1 pont

Mivel $n = 2k$, ezért a papírlapra $2 \cdot 671 = 1342$-től $4 \cdot 671 = 2684$-ig írtuk fel a számokat. 1 pont

b) A második esetben n páratlan, azaz $n = 2k-1$, ahol $k \in N^+$.

Ekkor a papírlapra írt számok:

(5) $$2k-1, 2k, 2k+1, \ldots, 4k-3, 4k-2.$$

Az (5)-ben szereplő számok közül páros:

$$2k,\ 2k+2, \ldots, 4k-2,$$

ez a számsorozat egy 2 differenciájú számtani sorozat k darab tagja.

A számtani sorozat összegképlete szerint (5)-ben a páros számok összege:

$$S_3 = \frac{2k+4k-2}{2} \cdot k,$$

ebből

(6) $$S_3 = (3k-1) \cdot k,$$

$$S_3 = 3k^2 - k.$$ 1 pont

Az (5)-ben felsorolt számok közül páratlanok:

$$2k-1,\ 2k+1, \ldots, 4k-3,$$

ez is k darab, 2 differenciájú számtani sorozatot alkotó szám, így összegük:

$$S_4 = \frac{2k-1+4k-3}{2} \cdot k,$$

azaz

(7) $$S_4 = (3k-2) \cdot k,$$

$$S_4 = 3k^2 - 2k\,.$$ 1 pont

A feltétel miatt

$$S_3 - S_4 = 2013\,,$$

ebből (6) és (7) behelyettesítésével

(8) $$k = 2013\,.$$ 1 pont

(8)-ból az adódik, hogy ha n páratlan, akkor a papírlapra $2 \cdot 2013 - 1 = 4025$-től $4 \cdot 2013 - 2 = 8050$-ig írtuk fel a számokat. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

A papírlapra felírt számok:

$$n,\ n+1, \ldots, 2n-1,\ 2n\,,$$

ez $n+1$ db szám. 1 pont

a) ha n páratlan, akkor a felírt páratlan számok:

$$n,\ n+2, \ldots, 2n-1\,,$$

ez $\frac{n+1}{2}$ darab páratlan szám.

A felírt páros számok:

$$n+1,\ n+3, \ldots, 2n-2,\ 2n\,,$$

ez $\frac{n+1}{2}$ darab páros szám. 1 pont

Az összegek különbsége:

$$x = [(n+1) + \ldots + (2n-2) + 2n] - [n + (n+2) + \ldots + (2n-1)]\,.$$

Az összeadás kommutatív és asszociatív tulajdonsága alapján átrendezve:

$$x = [(n+1) - n] + [(n+3) - (n+2)] + \ldots + [2n - (2n-1)]\,.$$ 1 pont

Minden szögletes zárójelben a különbség 1, és a zárójelek száma $\frac{n+1}{2}$, így

$$x = \frac{n+1}{2} \cdot 1\,.$$

A feltétel miatt $x = 2013$, ezért

$$\frac{n+1}{2}=2013,$$

$$n=4025.$$ 1 pont

Eszerint 4025-től 8050-ig írtuk a lapra a számokat. 1 pont

b) ha n páros, akkor a felírt páros számok:

$$n,\ n+2,\ldots,2n,$$

ez $\frac{n}{2}+1$ darab páros szám.

A felírt páratlan számok:

$$n+1,\ n+3,\ldots,2n-3,\ 2n-1,$$

ez $\frac{n}{2}$ darab páratlan szám. 1 pont

Az összegek különbsége:

$$x=[n+(n+2)+\ldots+(2n-2)+2n]-[(n+1)+(n+3)+\ldots+(2n-1)].$$

Az összeadás kommutatív és asszociatív tulajdonsága alapján átrendezve:

$$x=[2n-(2n-1)]+[(2n-2)-(2n-3)]+\ldots+[(n+2)-(n+1)]+n.$$ 1 pont

Minden szögletes zárójelben a különbség 1, és a zárójelek száma $\frac{n}{2}$, így

$$x=\frac{n}{2}\cdot 1+n,$$

$$x=\frac{3n}{2}.$$ 1 pont

A feltétel miatt $x=2013$, ezért

$$\frac{3n}{2}=2013,$$

azaz

$$n=1342.$$ 1 pont

Eszerint a lapra 1342-től $2\cdot 1342=2684$-ig írtuk a számokat. 1 pont

Összesen 10 pont

2. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$\log_3(\log_2 x)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right)=1,$$

és

$$58^{x\cdot y^3}-31^{x\cdot y^3}=3^{x+y^3}$$

egyenletekből álló egyenletrendszert!

Megoldás:

a logaritmus értelmezése miatt az első egyenletből

(1) $$x>0,$$

illetve

$$\log_2 x>0,$$

azaz

$$\log_2 x>\log_2 1,$$

ebből pedig az $f(x)=\log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekvő tulajdonsága miatt

(2) $$x>1$$

következik.

Ugyancsak a logaritmus értelmezése miatt az első egyenletből

(3) $$y>0,$$

és

$$\log_{\frac{1}{2}} y>0,$$

amelyből

$$\log_{\frac{1}{2}} y>\log_{\frac{1}{2}} 1,$$

innen pedig a $g(y)=\log_{\frac{1}{2}} y$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonsága miatt

(4) $$y<1$$

adódik.

(1)-et és (2)-t összevetve kapjuk az x-re vonatkozó feltételt:

(5) $$x > 1,$$

valamint (3)-ból és (4)-ből az y -ra:

(6) $$0 < y < 1.$$ 2 pont

Az egyenlet megoldásához átalakítjuk az egyes tagokat:

$$\log_{\frac{1}{2}} y = \frac{\log_2 y}{\log_2 \frac{1}{2}},$$

vagyis

(7) $$\log_{\frac{1}{2}} y = \frac{\log_2 y}{-1} = -\log_2 y = \log_2 \frac{1}{y}.$$

(7)-ből az következik, hogy

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2 \frac{1}{y}\right),$$

ebből pedig ismételt átalakítással

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2 \frac{1}{y}\right) = \frac{\log_3\left(\log_2 \frac{1}{y}\right)}{\log_3 \frac{1}{3}},$$

illetve

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2 \frac{1}{y}\right) = -\log_3\left(\log_2 \frac{1}{y}\right).$$ 1 pont

Ezért az egyenletrendszer első egyenlete átírható a

(8) $$\log_3(\log_2 x) - \log_3\left(\log_2 \frac{1}{y}\right) = 1$$

alakba.

Alkalmazzuk (8) bal oldalára az azonos alapú logaritmikus kifejezések különbségére vonatkozó azonosságot:

$$\log_3 \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{y}} = 1,$$

amiből

(9) $$\log_3 \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{y}} = \log_3 3 .$$ 1 pont

(9)-ből a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű tulajdonsága miatt következik, hogy

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{y}} = 3 ,$$

amit tovább alakítva:

$$\log_2 x = 3 \cdot \log_2 \frac{1}{y} ,$$

$$\log_2 x = \log_2 \frac{1}{y^3} .$$

Ismét hivatkozva a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű tulajdonságára

$$x = \frac{1}{y^3} ,$$

(10) $$x \cdot y^3 = 1 .$$ 1 pont

Az egyenletrendszer második egyenletének bal oldalán mindkét kifejezés hatványkitevője megegyezik (10) bal oldalával, ezért ebből az egyenletből

$$58^1 - 31^1 = 3^{x+y^3} ,$$

azaz

$$27 = 3^{x+\frac{1}{x}} ,$$

vagyis

(11) $$3^3 = 3^{x+\frac{1}{x}} .$$ 1 pont

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű tulajdonságából következik, hogy (11) mindkét oldalán megegyeznek a hatványkitevők:

$$3 = x + \frac{1}{x} ,$$

ebből ekvivalens átalakításokkal az

(12) $$x^2 - 3x + 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

(12) gyökei

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ és } x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$ 1 pont

Mivel $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{3-\sqrt{4}}{2} = \frac{1}{2}$, ezért (5) alapján x_2 nem megoldása a feladatnak.

Ugyanakkor $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{3+\sqrt{4}}{2} = \frac{5}{2}$, tehát x_1 megfelel az (5) feltételnek, és mivel átalakításaink a megadott halmazon ekvivalensek voltak, ezért megoldása a feladatnak. 1 pont

A (10) összefüggésből így

$$y^3 = \frac{1}{x},$$

azaz

$$y^3 = \frac{2}{3+\sqrt{5}},$$

amelyből a nevező négyzetgyöktelenítésével és egyszerűsítéssel

$$y^3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \qquad (13)$$

Az előzőekben láttuk, hogy $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$, ezért

$$0 < y^3 < \frac{1}{2},$$

így teljesül a (6) feltétel is, vagyis

$$y = \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

a feladat megoldása. 1 pont

Átalakításaink a feltételeknek megfelelő számhalmazokon ekvivalensek voltak, azt kaptuk, hogy az egyenletrendszer mindkét egyenletét egyetlen valós számpár elégíti ki, mégpedig

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ és } y = \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$ 1 pont

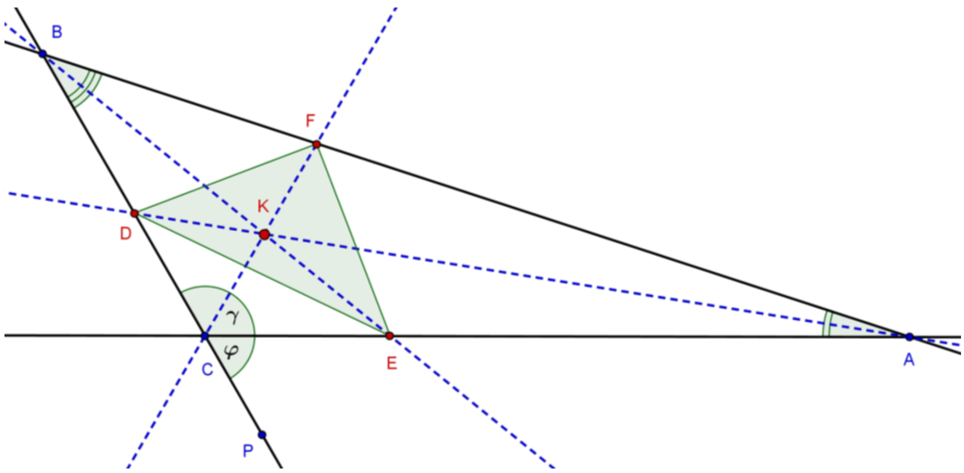
Összesen: 10 pont

3. Az ABC háromszög egyik szöge $120°$-os.

Bizonyítsa be, hogy a belső szögfelezőknek a szemben levő oldalakkal való metszéspontjai derékszögű háromszöget határoznak meg!

1. Megoldás: az ABC háromszög $120°$-os szöge legyen az $ACB\angle = \gamma$ szög.

A BC félegyenesen a C ponton túl felvettünk egy P pontot.



1. ábra

A $PCA\angle = \varphi$ szög az $ACB\angle = \gamma$ kiegészítő szöge, ezért $\varphi = 180^0 - 120^0 = 60°$. 1 pont

A $PCF\angle$ a CFB háromszögnek külső szöge. Ezt a szöget a CA egyenes felezi, hiszen CF az ABC háromszögben belső szögfelező, és ezért

$$ACF\angle = 60°,$$

az előzőek szerint pedig

$$\varphi = 60°.$$

1 pont

Mivel a CFB háromszög $PCF\angle$ külső szögét a CA egyenes felezi, ezért a CA egyenes áthalad a CFB háromszög CF oldalához hozzáírt kör középpontján. 2 pont

A CFB háromszög CF oldalához hozzáírt kör középpontján áthalad a háromszög B pontjából induló belső szögfelezője is.

Ezért a CA külső szögfelező és a B pontból induló belső szögfelező E metszéspontja a CFB háromszög CF oldalához hozzáírt kör középpontja. 2 pont

Az E pont illeszkedik a CFB háromszög F csúcsához tartozó külső szögfelezőre is. Ez pedig azt jelenti, hogy az FE egyenes felezi a $CFA\angle$ szöget. 2 pont

Hasonlóképpen mutatható meg, hogy az AFC háromszög CF oldalához hozzáírt körének középpontja a D pont, és ezért az FD egyenes felezi a $CFB\angle$ szöget. 1 pont

Mivel

$$BFC\angle + CFA\angle = 180°,$$

és

$$DFE\angle = DFC\angle + CFE\angle = \frac{BFC\angle}{2} + \frac{CFA\angle}{2},$$

ezért

$$DFE\angle = \frac{180^0}{2} = 90^0,$$

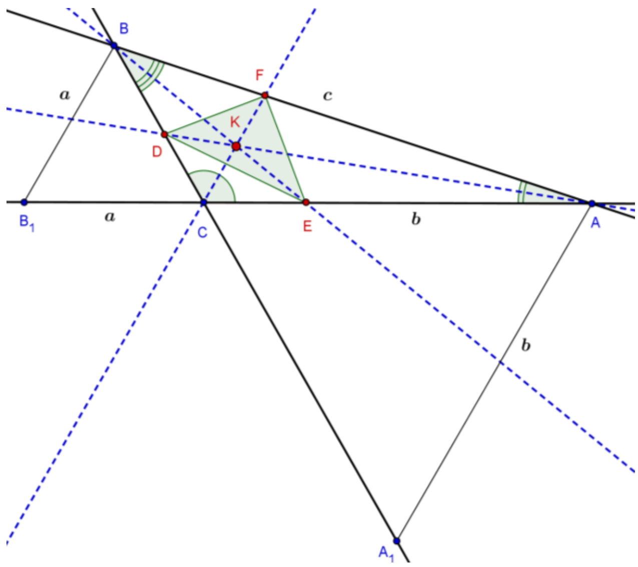
tehát a belső szögfelezőknek a szemben levő oldalakkal való metszéspontjai valóban derékszögű háromszöget alkotnak, melynek derékszögű csúcsa az AB oldalon van. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Az ABC háromszög $120°$-os szöge legyen az $ACB\angle$ szög.

A 2. ábrán párhuzamost húztunk az A és B pontokon keresztül az $ACB\angle$ szög szögfelezőjével, a CF egyenessel. A párhuzamosok a BC és AC egyeneseket rendre az A_1 és B_1 pontokban metszik. 1 pont



2. ábra

A CBB_1 és a CA_1A háromszögek két-két szöge 60^0, mert

$$BCF\angle = \frac{120^0}{2},$$

és $CBB_1\angle$ ennek váltószöge, vagyis

$$CBB_1\angle = 60^0,$$

továbbá

$$B_1CB\angle = 180^0 - 120^0 = 60^0.$$

Hasonlóan

$$A_1CA\angle = 60^0 \text{ és } CAA_1\angle = 60^0.$$

A CBB_1 és a CA_1A tehát szabályos háromszögek, amelyekben az ábra jelöléseivel

$$BB_1 = B_1C = CB = a$$

és

$$CA_1 = A_1A = AC = b. \qquad \text{1 pont}$$

A $BAB_1\angle$ szöget a CF és B_1B párhuzamos egyenesekkel metszettük el, ezért felírhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét (a 2. ábra jelöléseivel):

$$\frac{CF}{a} = \frac{b}{a+b},$$

ahonnan

(1) $$CF = \frac{a \cdot b}{a+b}. \qquad \text{1 pont}$$

A párhuzamos szelők tételének felírásával

$$\frac{AF}{c} = \frac{b}{a+b},$$

ebből

(2) $$AF = \frac{b \cdot c}{a+b}. \qquad \text{1 pont}$$

(1) és (2) összevetésével

(3) $$\frac{CF}{AF} = \frac{a}{c}.$$

Az ABC háromszögben a belső szögfelező tétele miatt

(4) $$\frac{CE}{AE}=\frac{a}{c}.$$

(3) és (4) együttesen azt jelentik, hogy

$$\frac{CF}{AF}=\frac{CE}{AE},$$

ebből pedig a belső szögfelező tételének megfordítását alkalmazva az következik, hogy a CFA háromszögben az FE egyenes felezi a $CFA\angle$ szöget. 1 pont

Hasonlóan: az ABA_1 szöget a CF és A_1A párhuzamos egyenesekkel metszettük el, ezért felírhatjuk a párhuzamos szelők tételét:

$$\frac{BF}{c}=\frac{a}{a+b}$$

ahonnan

(5) $$BF=\frac{a\cdot c}{a+b}.$$ 1 pont

(1) és (5) összefüggésekből

(6) $$\frac{CF}{BF}=\frac{b}{c}$$

következik. 1 pont

Az ABC háromszögben a belső szögfelező tételéből azt kapjuk, hogy

(7) $$\frac{CD}{BD}=\frac{b}{c}.$$ 1 pont

(6) és (7) szerint

(8) $$\frac{CF}{BF}=\frac{CD}{BD}.$$ 1 pont

A belső szögfelező tételének megfordításából következik, hogy a CFB háromszögben az FD egyenes felezi a $CFB\angle$ szöget.

Azt kaptuk, hogy az FE egyenes felezi a $CFA\angle$ szöget, az FD egyenes felezi a $CFB\angle$ szöget, így

$$DFE\angle=DFC\angle+EFC\angle,$$

$$DFE\angle=\frac{BFC\angle}{2}+\frac{CFA\angle}{2},$$

és mivel

$$BFC\angle+CFA\angle=180^0,$$

ezért

$$DFE\angle = \frac{180^0}{2} = 90^0,$$

vagyis a belső szögfelezőknek a szemben levő oldalakkal való metszéspontjai valóban derékszögű háromszöget alkotnak, ahol a derékszög csúcsa az F pontban van. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. megoldás: a 2. megoldás ábráját és jelöléseit használjuk.

Azt fogjuk bizonyítani azt, hogy

$$\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AE} \text{ és } \frac{CF}{BF} = \frac{CD}{BD},$$

ezekből a CFA és CFB háromszögekben a belső szögfelező tételének megfordításával azt kapjuk, hogy az FE egyenes felezi a $CFA\angle$ szöget és az FD egyenes felezi a $CFB\angle$ szöget. 1 pont

Felírjuk az ABC háromszög $AB = c$ oldalára és $ACB\angle$ szögére a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 120°,$$

amelyből $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ miatt

(1) $$c^2 = a^2 + b^2 + a \cdot b$$

következik. 1 pont

Felírhatjuk az $ACB\angle$ szögfelezője által az AB oldalon létrehozott AF és $c - AF = BF$ szakaszokra a belső szögfelező tételét , amely szerint:

$$\frac{AF}{c - AF} = \frac{b}{a},$$

ebből rendezés után

(2) $$AF = \frac{b \cdot c}{a + b} \text{ és } BF = \frac{a \cdot c}{a + b},$$

következik.

Hasonlóképpen kapjuk a $BAC\angle$ szögfelezője által a BC oldalból lemetszett BD és CD szakaszokra, hogy:

(3) $$BD = \frac{a \cdot c}{b + c} \text{ és } CD = \frac{a \cdot b}{b + c},$$

végül az $ABC\angle$ szögfelezője által a CA oldalból lemetszett CE és AE szakaszokra, hogy:

(4) $$CE = \frac{a \cdot b}{a + c} \text{ és } AE = \frac{b \cdot c}{a + c}.$$ 2 pont

Felhasználunk egy, a belső szögfelező háromszög belsejébe eső szakaszának négyzetére vonatkozó nevezetes összefüggést (a Geometriai Feladatgyűjtemény I. kötetének 1256. feladata), amely szerint:
a szögfelező négyzete egyenlő a közrefogó oldalak szorzatának és azon két szakasz szorzatának a különbségével, amelyekre a szögfelező a szemközti oldalt osztja.

Ebből az adódik, hogy

(5) $$CF^2 = a \cdot b - BF \cdot AF.$$ 1 pont

(2) és (5) összevetésével

$$CF^2 = a \cdot b - \frac{a \cdot c}{a + b} \cdot \frac{b \cdot c}{a + b},$$

ebből a műveletek elvégzésével és rendezéssel

$$CF^2 = \frac{a \cdot b \cdot (a + b + c) \cdot (a + b - c)}{(a + b)^2},$$

illetve

(6) $$CF = \frac{\sqrt{a \cdot b \cdot (a + b + c) \cdot (a + b - c)}}{a + b}.$$ 1 pont

A $\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AE}$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$CF = AF \cdot \frac{CE}{AE},$$

amelyből (2) és (4) szerint a műveletek elvégzésével és egyszerűsítéssel

(7) $$CF = \frac{a \cdot b}{a + b}$$

adódik.

A $\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AE}$ egyenlőség tehát pontosan akkor igaz, ha (6) és (7) egyszerre teljesül, vagyis ha

(8) $$\frac{\sqrt{a \cdot b \cdot (a+b+c) \cdot (a+b-c)}}{a+b} = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

igaz. 1 pont

(8) -ból egyszerűsítéssel, a műveletek elvégzésével és rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$c^2 = a^2 + b^2 + a \cdot b.$$

Ez éppen a koszinusztételből kapott (1) összefüggés, amely nyilvánvalóan igaz.

Ezzel beláttuk, hogy $\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AE}$ valóban teljesül, ezért az FE egyenes felezi a $CFA\angle$ szöget. 1 pont

Hasonlóképpen: a $\frac{CF}{BF} = \frac{CD}{BD}$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$CF = BF \cdot \frac{CD}{BD},$$

ez (2) és (3) alapján egyszerű átalakításokkal könnyen belátható, hogy éppen a (7) egyenlőségre vezet.

Eszerint $\frac{CF}{BF} = \frac{CD}{BD}$ is pontosan akkor igaz, amikor (6) és (7) egyszerre igaz, vagyis, amikor (8) teljesül, ezt pedig az előzőekben már bizonyítottuk.

Ezzel igazoltuk, hogy az FD egyenes felezi a $CFB\angle$ szöget. 1 pont

Bizonyításunk szerint az FE és FD egyenesek rendre felezik a $CFA\angle$ és $CFB\angle$ szögeket, és mivel

$$BFC\angle + AFC\angle = 180°,$$

ezért,

$$DFE\angle = DFC\angle + EFC\angle = \frac{BFC\angle}{2} + \frac{AFC\angle}{2} = 90°,$$

vagyis a belső szögfelezőknek a szemben levő oldalakkal való metszéspontjai valóban derékszögű háromszöget alkotnak. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont