Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2012/2013

Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

II. forduló

Megoldások

1. feladat

Mely valós $x; y$ számpárokra teljesül a

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\cdot\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}$$

egyenlőség?

1. megoldás

A négyzetgyök értelmezése és az egyenlet bal oldalán szereplő törtek nevezői miatt $x>2$ és $y>1$ egyszerre kell, hogy teljesüljön. 1 pont

Legyen

$$a=\sqrt{x-2} \text{ és } b=\sqrt{y-1}.$$

(A négyzetgyök definíciója és az $x>2$ és $y>1$ feltételek miatt $a>0$ és $b>0$.) 1 pont

A kiinduló egyenlet átírható

(1) $$\frac{36}{a}+\frac{4}{b}+4a+b-28=0,$$

$$\frac{36}{a}-24+4a+\frac{4}{b}-4+b=0$$

alakba. 1 pont

Az $a>0$ és $b>0$ feltételek miatt $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ értelmezett a valós számok halmazán, továbbá $\sqrt{a}>0$ és $\sqrt{b}>0$. 1 pont

Ezért felírhatjuk, hogy az (1) egyenlet bal oldala két teljes négyzet összege:

(2) $$\left(\frac{6}{\sqrt{a}}-2\cdot\sqrt{a}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)^2=0.$$

2 pont

Két valós szám négyzetének összege akkor és csak akkor zérus, ha mindkét valós szám értéke zérus. 1 pont

Eszerint:

(3) $$\frac{6}{\sqrt{a}} - 2\cdot\sqrt{a} = 0,$$

és

(4) $$\frac{2}{\sqrt{b}} - \sqrt{b} = 0.$$

1 pont

A (3) és (4) egyenletekből adódik, hogy

$$a = 3 \text{ és } b = 2.$$

Innen pedig az $a = \sqrt{x-2}$ és $b = \sqrt{y-1}$ miatt azt kapjuk, hogy

$$x = 11 \text{ és } y = 5.$$ 1 pont

Számolással ellenőrizhető, hogy az $x = 11; y = 5$ számpár valóban megoldása az eredeti egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás

A négyzetgyök értelmezése és az egyenlet bal oldalán szereplő törtek nevezői miatt $x > 2$ és $y > 1$ egyszerre kell, hogy teljesüljön. 1 pont

Továbbá a négyzetgyök definíciója miatt $\sqrt{x-2}$ és $\sqrt{y-1}$ pozitív számok. 1 pont

A megoldandó egyenlet átírható a

(1) $$\frac{36}{\sqrt{x-2}} + 4\cdot\sqrt{x-2} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1} = 28$$

1 pont

alakba.

A fentiek miatt az (1) bal oldalán szereplő négy kifejezés mindegyike értelmezett és pozitív. Alkalmazhatjuk tehát a $\frac{36}{\sqrt{x-2}}$ és $4\cdot\sqrt{x-2}$, illetve a $\frac{4}{\sqrt{y-1}}$ és $\sqrt{y-1}$ kifejezésekre a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

(2) $$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+4\cdot\sqrt{x-2}\ge 2\cdot\sqrt{\frac{36}{\sqrt{x-2}}\cdot 4\cdot\sqrt{x-2}},$$

illetve

(3) $$\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1}\ge 2\cdot\sqrt{\frac{4}{\sqrt{y-1}}\cdot\sqrt{y-1}}.$$ 2 pont

(2) és (3) szerint

(4) $$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+4\cdot\sqrt{x-2}\ge 24,$$

és

(5) $$\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1}\ge 4.$$ 1 pont

(4) és (5) összeadásával azt kapjuk, hogy

(6) $$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+4\cdot\sqrt{x-2}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1}\ge 28.$$

A kiinduló egyenlet szerint azonban

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+4\cdot\sqrt{x-2}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1}=28,$$

ezért a (6) egyenlőtlenségben az egyenlőség esete áll fenn. 1 pont

Ez éppen azt jelenti, hogy a (2) és (3) egyenlőtlenségekben is egyenlőség van, ez pedig pontosan akkor lehetséges, ha a számtani és mértani középben szereplő mennyiségek egyenlők.

Ezért

(7) $$\frac{36}{\sqrt{x-2}}=4\cdot\sqrt{x-2},$$

és

(8) $$\frac{4}{\sqrt{y-1}}=\sqrt{y-1}.$$ 1 pont

A (7) és (8) egyenletekből kapjuk, hogy

$$x=11 \text{ és } y=5.$$ 1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az $x=11;\ y=5$ számpár valóban megoldása az eredeti egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. **Mutassa meg, hogy ha az**

$$A = 224\underbrace{99...9}_{k-2\ db\ 9}1\underbrace{00...0}_{k\ db\ 0}9 \quad (k \in N, k \geq 2)$$

tízes számrendszerbeli pozitív egész szám, akkor a

$$B = \sqrt{A} + 3$$

szám pozitív egész. Bizonyítsa be, hogy ez a B **szám csak a** 2; 3; 5 **prímszámokkal osztható!**

1. **megoldás**

Az

$$A = 224\underbrace{99...9}_{k-2\ db\ 9}1\underbrace{00...0}_{k\ db\ 0}9$$

számot a helyiértékek szerint átalakítjuk:

(1) $$A = 224\underbrace{99...9}_{k-2\ db\ 9}\underbrace{00...0}_{k+2\ db\ 0} + 1\underbrace{00...0}_{k+1\ db\ 0} + 9,$$ 2 pont

továbbá

(2) $$A = 225\underbrace{00...0}_{2k\ db\ 0} - 1\underbrace{00...0}_{k+2\ db\ 0} + 1\underbrace{00...0}_{k+1\ db\ 0} + 9,$$ 1 pont

$$A = 225 \cdot 10^{2k} - 10^{k+2} + 10^{k+1} + 9,$$

és így

(3) $$A = 225 \cdot 10^{2k} - 90 \cdot 10^{k} + 9.$$ 2 pont

(3) jobb oldala teljes négyzet, mégpedig

(4) $$A = \left(15 \cdot 10^{k} - 3\right)^2.$$ 1 pont

(4)-ből az következik, hogy

$$\sqrt{A} = \sqrt{\left(15 \cdot 10^{k} - 3\right)^2},$$

$$\sqrt{A} = 15 \cdot 10^{k} - 3,$$

hiszen a $k \in N; k \geq 2$ feltétel miatt nyilvánvaló, hogy $15 \cdot 10^{k} - 3$ pozitív szám. 1 pont

Ezért

$$B = \sqrt{A} + 3,$$

$$B = 15 \cdot 10^{k} - 3 + 3,$$

$$B = 15 \cdot 10^k,$$

és ez azt jelenti, hogy a B szám valóban pozitív egész. 1 pont

Mivel

$$B = 15 \cdot 10^k,$$

ezért

(5) $$B = 2^k \cdot 3 \cdot 5^{k+1}.$$ 1 pont

(5) jobb oldalán csak a $2; 3; 5$ prímszámok pozitív egész kitevőjű hatványai szerepelnek, ezért a B pozitív egész szám valóban csak a $2; 3; 5$ prímszámokkal osztható. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: a $\sqrt{A} = 15 \cdot 10^k - 3$ alakból és a $k \in N; k \geq 2$ feltételből világosan látszik, hogy $\sqrt{A}$ is pozitív egész.

2. megoldás

Az $A = 224\underbrace{99...9}_{k-2\ db\ 9}1\underbrace{00...0}_{k\ db\ 0}9$ számot felírjuk a helyiértékeket figyelembe véve:

$$A = 224 \cdot 10^{2k} + 9 \cdot 10^{2k-1} + ... + 9 \cdot 10^{k+2} + 10^{k+1} + 9,$$

(1) $$A = 224 \cdot 10^{2k} + C + 10^{k+1} + 9.$$ 2 pont

Az (1)-ben szereplő

$$C = 9 \cdot 10^{2k-1} + ... + 9 \cdot 10^{k+2} = C$$

összeg egy olyan mértani sorozat $k-2$ darab egymás utáni tagjának az összege, amelynek első tagja $a_1 = 9 \cdot 10^{k+2}$, hányadosa pedig $q = 10$. 1 pont

A mértani sorozatra vonatkozó összegképletet alkalmazva

$$C = 9 \cdot 10^{k+2} \cdot \frac{10^{k-2} - 1}{9},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és egyszerűsítés után

(2) $$C = 10^{2k} - 10^{k+2}.$$ 1 pont

Ezt (1)-be helyettesítve:

(3) $$A = 225 \cdot 10^{2k} - 90 \cdot 10^k + 9.$$ 1 pont

Innen a megoldás menete megegyezik az 1. megoldás menetével. 5 pont

Összesen: 10 pont

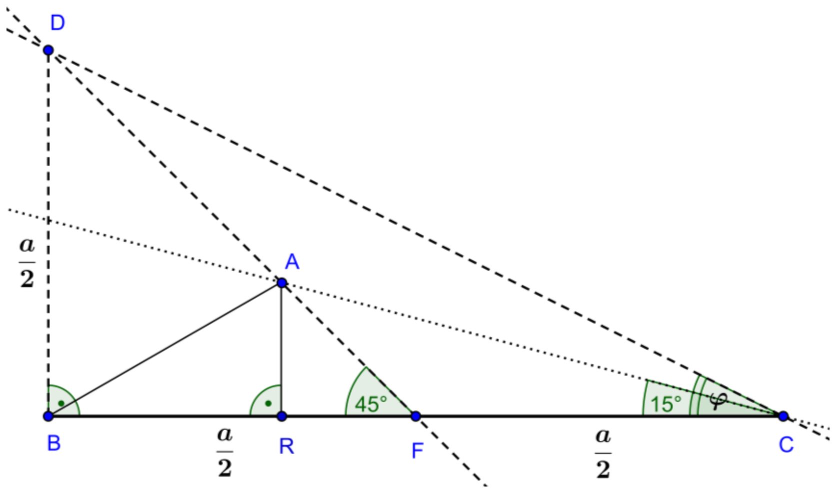
3. **feladat**

Legyen az ABC háromszögben a BC oldal felezőpontja F, legyen továbbá $BCA\angle = 15°$ és $BFA\angle = 45°$.

Határozza meg a $CAB\angle$ nagyságát!

1. **megoldás:**

először azt bizonyítjuk, hogy az A pontnak a BC egyenesére eső, R-rel jelölt merőleges vetülete a BF szakasz belső pontja. 1 pont



1. ábra

Mivel $BFA\angle$ külső szöge az AFC háromszögnek, ezért

$$FAC\angle = 30°.$$

Az AFC háromszögben

$$FAC\angle > FCA\angle, \ (30° > 15°)$$

ezért

$$FC > FA.$$ 1 pont

Az ARF derékszögű háromszögben az FA átfogó, RF befogó, tehát

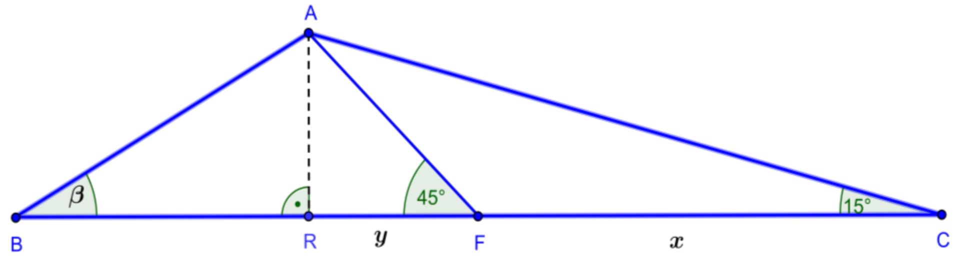
$$FA > RF,$$

így

$$RF < FC = FB,$$

és ez azt jelenti, hogy R belső pontja BF szakasznak. 1 pont

Legyen a 2. ábrán $BF = FC = x$.



2. ábra

Az AFR háromszög egyenlő szárú derékszögű, mert $FAR\angle = 90° - 45° = 45°$.

Az $AR = FR = y$ jelöléssel

$$FA = y \cdot \sqrt{2}.$$

Az ARC derékszögű háromszögben

(1) $$tg15° = \frac{y}{x+y}.$$ 1 pont

De $tg15°$ értékét ki tudjuk számítani:

$$tg15° = tg(45° - 30°),$$

$$tg15° = \frac{tg45° - tg30°}{1 + tg45° \cdot tg30°},$$

(2) $$tg15° = 2 - \sqrt{3}.$$ 1 pont

(1) és (2) összevetéséből kapjuk, hogy

$$\frac{y}{x+y} = 2 - \sqrt{3},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és rendezés után

$$x = y \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2 - \sqrt{3}}$$

következik. Ebből a nevező négyzetgyöktelenítése után azt kapjuk, hogy

(3) $$x = y \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right).$$ 1 pont

Az ABR háromszögben

$$tg\beta = \frac{AR}{BR}.$$

Jelöléseink szerint $AR = y$ és $BR = x - y$, azaz

(4) $$tg\beta = \frac{y}{x-y}.$$ 1 pont

A (3) és (4) összefüggések szerint

$$tg\beta = \frac{y}{y \cdot \sqrt{3}},$$

azaz

$$tg\beta = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

ebből pedig $\beta = 30°$ következik. 2 pont

Mivel az ABC háromszögben

$$\beta + 15° + CAB\angle = 180°,$$

ezért

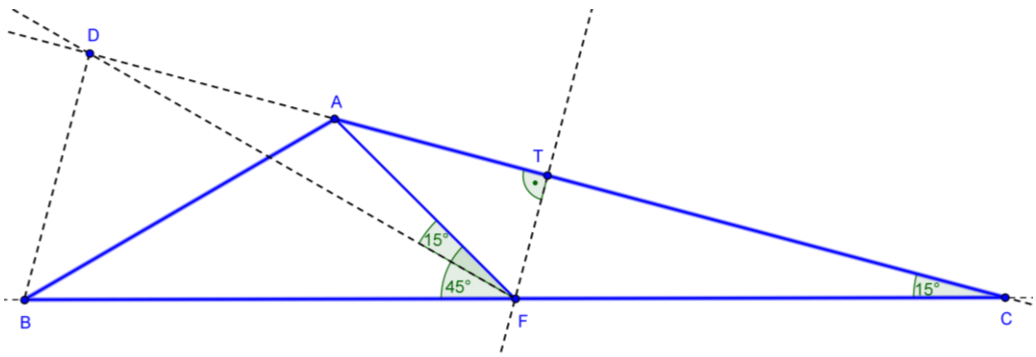
$$CAB\angle = 135°.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

Rajzoljuk meg az F pontból kiinduló félegyenest, amely az AF szakasszal $15°$-os, és a BF szakasszal $30°$-os szöget zár be. A félegyenes és az AC egyenes közös pontja legyen D (3. ábra).

Bocsássunk merőlegest az F pontból az AC egyenesére a merőleges talppontja legyen T. 2 pont



3. ábra

Mivel

$$BCA\angle = 15° \text{ és } BFA\angle = 45°,$$

továbbá $BFA\angle$ külső szöge az AFC háromszögnek, ezért

$$FAC\angle = 30°.$$ 1 pont

Ugyanakkor $FAC\angle$ külső szöge az ADF háromszögnek, így

$$FDA\angle = 15°.$$ 1 pont

Ezekből következik, hogy az FCD és ADF háromszögek egyenlő szárú háromszögek, tehát

(1) $$FC = FD \text{ és } AF = AD.$$

Mivel F a BC oldal felezőpontja, ezért (1) figyelembe vételével

(2) $$FC = FB = FD.$$ 1 pont

(2) azt jelenti, hogy az F pont a BCD háromszög körülírt körének középpontja.

Ezért Thalész tétele miatt a BCD háromszög derékszögű, amelyben

$$BDC\angle = 90°.$$ 1 pont

Mivel az FT egyenest az $AC\,(\equiv DC)$ egyenesre merőlegesen húztuk, ezért

$$FT \parallel BD.$$

Az F pont a BC szakasz felezőpontja, ezért FT a BCD háromszög középvonala, és így

(3) $$BD = 2 \cdot FT.$$ 1 pont

Az AFT derékszögű háromszögben

$$FAT\angle = FAC\angle = 30°,$$

ezért az ismert tulajdonság miatt

$$AF = 2 \cdot FT,$$

továbbá $AF = AD$-ből

(4) $$AD = 2 \cdot FT.$$ 1 pont

(3) és (4) szerint

$$AD = BD,$$

ez pedig $BDC\angle = BDA\angle = 90°$ miatt azt jelenti, hogy a BDA háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög. 1 pont

Ebből adódik, hogy

$$BAD\angle = 45°,$$

ebből pedig

$$CAB\angle = 135°$$

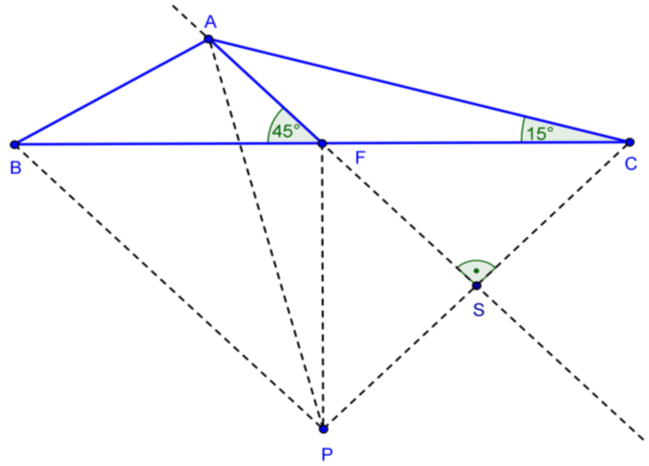
következik. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. megoldás:

Tükrözzük a C pontot az AF egyenesére, a tükörképpont legyen P. 1 pont

Jelöléseinket a 4. ábrán láthatjuk.



4. ábra

Mivel $BFA\angle$ külső szöge az AFC háromszögnek, ezért

$$FAC\angle = 30°.$$ 1 pont

Így a tükrözés miatt egyrészt

$$PAF\angle = PAS\angle = 30°,$$

azaz

$$CAP\angle = 60°,$$

másrészt

$$AC = AP.$$

Ez azt jelenti, hogy az APC szabályos háromszög. 1 pont

Az APF és ACF háromszögekben az AF oldal közös, továbbá az előzőek szerint egyrészt

$$AC = AP,$$

másrészt

$$PAF\angle = CAF\angle = 30°,$$

ezért az APF és ACF háromszögek egybevágók.

Ebből következik, hogy

$$PFA\angle = CFA\angle = 135°,$$

és ezért

$$PFB\angle = PFC\angle = 90°.$$ 1 pont

Az APF és ACF háromszögek egybevágóságából az is következik, hogy

$$FP = FC,$$

így a PCF háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Az $FB = FC = FP$ és $PFB\angle = 90°$ összefüggések miatt a PFB háromszög is egyenlő szárú derékszögű háromszög. 1 pont

Ezekből az következik, hogy a BPC háromszög mindkét hegyesszöge $45°$-os, tehát a BPC háromszögben $PB = PC$, és $BPC\angle = 90°$.

Mivel APC szabályos háromszög, ezért

$$BPA\angle = BPC\angle - APC\angle = 90° - 60° = 30°.$$ 2 pont

A $PB = PC$ és $PA = PC$ egyenlőségekből

$$PA = PB$$

adódik, eszerint a PAB háromszög egyenlő szárú háromszög. 1 pont

Ebből

$$PAB\angle = \frac{180° - BPA\angle}{2} = 75°.$$

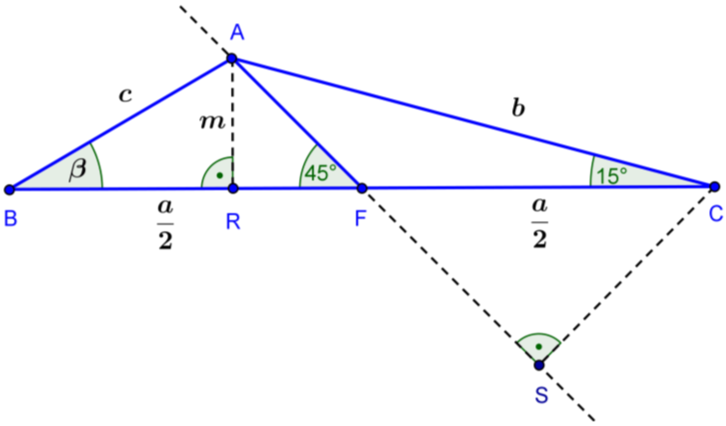
Mindezek alapján $CAB\angle = PAB\angle + PAC\angle = 75° + 60° = 135°$. 2 pont

Összesen: 10 pont

4. megoldás:

az 1. megoldásnak megfelelően bizonyítjuk, hogy az A pontnak a BC egyenesére eső merőleges vetülete a BF szakasz belső pontja. 3 pont

Bocsássunk merőlegest az A pontból a BC, a C pontból az AF egyenesére, a merőlegesek talppontjai rendre R és S, jelöléseink az 5. ábrán láthatók. 1 pont



5. ábra

Mivel $BFA\angle$ az AFC háromszögnek külső szöge, ezért

$$FAC\angle = SAC\angle = 30°,$$

így az ASC derékszögű háromszögben

$$ACS\angle = 60°.$$

Az ASC háromszögben az ismert összefüggés szerint

(1) $$SC = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}.$$ 1 pont

Az $ACS\angle = 60°$ miatt

$$FCS\angle = 60° - 15° = 45°,$$

tehát az FCS háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért

$$FC = SC \cdot \sqrt{2}.$$

Mivel $FC = \frac{a}{2}$ és (1) szerint $SC = \frac{b}{2}$, ezért $FC = SC \cdot \sqrt{2}$ -ből

(2) $$\frac{a}{2} = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{2}$$

adódik. 1 pont

Az ARC derékszögű háromszögben

(3) $$m = b \cdot \sin 15°,$$

a BRA derékszögű háromszögben pedig

$$tg\beta = \frac{m}{\frac{a}{2} - RF}.$$

Az ARF háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, így

$$RF = m,$$

ezért (2) és (3) figyelembe vételével

(4) $$tg\beta = \frac{b \cdot \sin 15°}{\frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} - b \cdot \sin 15°}.$$ 1 pont

A $\sin(\alpha - \beta)$-ra vonatkozó trigonometrikus azonosság szerint

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30°,$$

ahonnan

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right).$$ 1 pont

Ezt (4)-be helyettesítve, a műveletek elvégzése, rendezés, négyzetgyöktelenítés és egyszerűsítés után

(5) $$tg\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ 1 pont

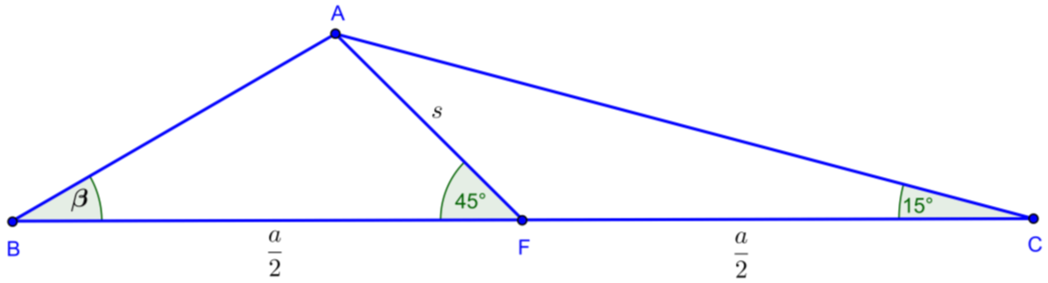
(5) éppen azt jelenti, hogy

$$\beta = 30°,$$

és így az ABC háromszögben $CAB\angle = 135°$. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

5. megoldás:



6. ábra

Az AF szakasz az ABC háromszöget két háromszögre osztja.

Kiszámítjuk az AFC háromszög szögeit:

mivel $BFA\angle$ külső szöge az AFC háromszögnek, ezért

$$AFC\angle = 135°,$$

$$FAC\angle = 30°.$$

Az $FBA\angle = \beta$ paramétert bevezetve az AFB háromszög szögei

$$FBA\angle = \beta,$$

$$FAB\angle = 135° - \beta.$$ 2 pont

Felírjuk az AFC és AFB háromszögekre a szinusztételt:

(1) $$\frac{\frac{a}{2}}{s} = \frac{\sin 30°}{\sin 15°},$$

illetve

(2) $$\frac{\frac{a}{2}}{s} = \frac{\sin(135° - \beta)}{\sin \beta}.$$ 2 pont

Az (1) és (2) egyenlőségéből:

$$\frac{\sin 30°}{\sin 15°}=\frac{\sin(135°-\beta)}{\sin\beta}.$$

Az addíciós tételeket behelyettesítve és ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\frac{2\cdot\sin 15°\cdot\cos 15°}{\sin 15°}=\frac{\sin 135°\cdot\cos\beta-\cos 135°\cdot\sin\beta}{\sin\beta},$$ 2 pont

$$2\cdot\cos 15°=\frac{\sin 135°\cdot\cos\beta-\cos 135°\cdot\sin\beta}{\sin\beta},$$

$$2\cdot\cos(45°-30°)=\frac{\sin 135°\cdot\cos\beta-\cos 135°\cdot\sin\beta}{\sin\beta},$$

$$2\cdot\cos(45°-30°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(ctg\beta+1),$$

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(ctg\beta+1).$$

Az utolsó összefüggésből

$$ctg\beta=\sqrt{3},$$

és így $\beta=30°$

adódik. 3 pont

Ezért a keresett szög

$$CAB\angle=30°+135°-30°=135°.$$ <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

6. megoldás:

Megoldásunkhoz a 6. ábrát használjuk, amelyen a $BC = a$ oldalt 2 egységnyinek választjuk. Ez a választás nyilvánvalóan nem sérti az általánosságot, hiszen a feladatban szereplő háromszög a szögei miatt csak a hasonlóság erejéig van meghatározva. Ezzel a választással $FB = FC = 1$. 2 pont

Legyen továbbá $AC = b$ és $AB = c$.

$BFA\angle$ külső szöge az AFC háromszögnek, ezért

$$AFC\angle = 135°,$$

és

$$FAC\angle = 30°. \quad \text{1 pont}$$

Felírhatjuk az AFC háromszögben a szinusztételt:

$$\frac{b}{1} = \frac{\sin 135°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},$$

innen

$$b = \sqrt{2}. \quad \text{1 pont}$$

Az ABC háromszögben először az $AB = c$ oldalra felírjuk a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 15°,$$

ebből $a = 2$ és $b = \sqrt{2}$ miatt

(1) $$c^2 = 6 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 15°. \quad \text{1 pont}$$

A $\cos(\alpha - \beta)$-ra vonatkozó trigonometrikus azonosságból

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30°,$$

amelyből

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{4}. \quad \text{1 pont}$$

Ezt (1)-gyel összevetve azt kapjuk, hogy

$$c^2 = 4 - 2 \cdot \sqrt{3},$$

innen pedig $4 - 2 \cdot \sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$ és $\sqrt{3} - 1 > 0$ figyelembe vételével

(2) $$c = \sqrt{3} - 1.$$ 1 pont

Az ABC háromszögben a $BC = a$ oldalra is felírjuk a koszinusztételt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

ahonnan $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ és $c = \sqrt{3} - 1$ behelyettesítésével

(3) $$4 = 2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \cos\alpha .$$

(3)-ból a műveletek elvégzésével és rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right)}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)},$$ 1 pont

innen egyszerűsítéssel és a tört nevezőjének négyzetgyöktelenítésével

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ 1 pont

Ez azt jelenti, hogy

$$CAB\angle = \alpha = 135°.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

4. **feladat**

Meg lehet-e számozni egy kocka csúcsait az $1, 2, ..., 7, 8$ **számokkal úgy, hogy minden csúcshoz különböző szám tartozzon, és bármelyik él két végpontjára írt számok összege is egymástól különböző legyen?**

Megoldás:

legyen a csúcsok „neve” a csúcsokra írt szám: $1;\ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ és

legyen az élek „neve” az élekre írt szám:

$$1+2=3; ... 7+8=15. \text{ (13db)}$$

Az $1;\ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ számokból képezhető párok összegei:

$$3; 4; 5; ...; 13; 14; 15. \text{ (13db)}$$ 1 pont

A csúcsok összege $=1+2+3+4+5+6+7+8=36$ 1 pont

Az élek összege egyenlő a csúcsok összegének háromszorosával, azaz $108-$cal, mert minden csúcsba három él fut be. 1 pont

A lehetséges 13 él összege:

$$3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=117.$$

Tekintettel arra, hogy a kockának 12 éle van, a 13 lehetséges érték közül pontosan egy kimarad, mégpedig, mivel $117=108+9$, ezért csak a 9-es maradhat ki. 2 pont

Ebből következik, hogy minden más élnek szerepelnie kell, így mind a $3; 4; 5$, mind a $13; 14; 15$ számhármasnak. 1 pont

Mivel a 3 és a 4 csak 1-1 féleképpen áll elő csúcsok összegeként ($1+2$, illetve $1+3$), az 1-es csúcs két szomszédja biztosan a 2, és a 3.

Az 5 kétféleképpen állítható elő ($2+3$, illetve $1+4$), ezért, mivel 2 és 3 lapátló csúcsai, az 1-gyel szomszédos harmadik csúcs a 4. 1 pont

A 13, 14 és 15-ös élek mindegyikének szerepelnie kell, ezért az előzőhöz hasonló gondolatmenettel (hiszen 15 és a 14 csak egy-egyféleképpen, a 13 pedig kétféleképpen bontható összegre) a 8-as csúcs szomszédjai csak 5, 6, 7 lehetnek. 1 pont

Az 1, 2, 3 és a 4 rögzítése után fennmaradó csúcsok közül csak az 1-es csúcsból induló testátló másik végpontja lehet a 8-as. 1 pont

A 8 szomszédjai közül az 5 nem lehet a 4 szomszédja, a 6 nem lehet a 3 szomszédja, és a 7 nem lehet a 2 szomszédja (hiszen a 9 nem szerepel az élek között).

Így mindhárom csúcsra egyetlen lehetőség marad. Ebben az esetben valamelyik él duplán szerepel, illetve így egy él kimarad.

Ez azt jelenti, hogy a kocka csúcsainak a feladatbeli feltételekkel történő megszámozása nem lehetséges. 1 pont

Összesen: 10 pont

:

5. feladat

Bizonyítsa be, hogy ha α hegyesszög, akkor

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geq 3+2\cdot\sqrt{2}\ \textbf{!}$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás:

Mivel α hegyesszög, azaz $0°<\alpha<90°$, ezért $\sin\alpha>0$ és $\cos\alpha>0$. 1 pont

Végezzük el a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán a kijelölt műveleteket, a lehetséges összevonásokat és rendezzük az egyenlőtlenséget, így az

(1) $$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\geq 2+2\cdot\sqrt{2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ezt elég bizonyítani. 1 pont

Alkalmazzuk az $\frac{1}{\sin\alpha}$ és $\frac{1}{\cos\alpha}$ pozitív számokra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}},$$

(2) $$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}.$$ 2 pont

Másrészt az (1) baloldalának harmadik tagjára:

$$\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha},$$

(3) $$\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

Mivel $0°<\alpha<90°$, ezért

$$0°<2\alpha<180°,$$

amiből

(4) $$0<\sin(2\alpha)\leq 1.$$

(3)-at és (4)-et összevetve:

(5) $$\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\geq\frac{2}{1},$$

és így

(6) $$\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}\geq\sqrt{2}\,.$$ 2 pont

(1) baloldalába behelyettesítve (2)-t, (5)-öt, majd (6)-ot

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}+2,$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\geq 2\cdot\sqrt{2}+2\,.$$ 2 pont

Ezt akartuk bizonyítani.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha (5)-ben a számtani és mértani középben szereplő két mennyiség egyenlő, vagyis ha

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha},$$

ez

$$\sin\alpha=\cos\alpha$$

esetén lehetséges. 1 pont

Ez pedig a $0°<\alpha<90°$ feltétel figyelembe vételével azt jelenti, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha $\alpha=45°$. 1 pont

Összesen 10 pont

: