Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2012/2013. tanév

Matematika I. kategória - 1. forduló

Javítási-értékelési útmutató

1. Az n pozitív egész számnak pontosan két pozitív osztója van, az $n+1$-nek pedig pontosan három.
   Hány pozitív osztója van az $n+2012$ számnak?

Megoldás:

Ismert, hogy az $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ osztóinak száma:

$$d(N) = (\alpha_1 + 1)\dots(\alpha_k + 1).$$ 1 pont

Ezért pontosan két pozitív osztója a prímszámoknak van. Mivel n prímszám, osztói:

$$n \text{ és } 1.$$ 1 pont

Pontosan három pozitív osztója a p^2 alakú számoknak van, ahol p prímszám, és ezek az osztók az

$$1; p; p^2$$

számok. 1 pont

Mindezeket figyelembe véve:

$$n+1 = p^2,$$

amelyből

$$n = p^2 - 1.$$

Ezt átalakítva:

$$n = (p-1)\cdot(p+1)$$

következik. 2 pont

Mivel n prím, és $p-1 < p+1$, ezért csak

$$p-1 = 1, \text{ és } p+1 = n,$$

lehet, azaz

$$p = 2,$$

és

$$n = 3.$$

Ez az n valóban prímszám, osztói 1 és 3.

Így $n+1=4=2^2$ osztói $1,\ 2,\ 4$. 2 pont

Ez azt jelenti, hogy

$$n+2012=2015,$$

amelynek prímtényezős felbontása:

$$2015=5^1\cdot 13^1\cdot 31^1,$$

ezért az $n+2012$ számnak pontosan $2\cdot 2\cdot 2=8$ pozitív osztója van, és ezek

$$1;5;13;31;65;155;403;2015.$$

3 pont

Összesen: 10 pont

2. Elhelyezhető-e a térben 11 pont úgy, hogy az általuk meghatározott egyenesek száma 53 legyen? Lehet-e a 11 pont által meghatározott egyenesek száma 54? Állítását indokolja!

Megoldás:

a) A pontok által meghatározott egyenesek száma akkor maximális, ha a pontok között semelyik három sincs egy egyenesen. 1 pont

Ezért a 11 pont által meghatározott egyenesek maximális száma:

(1) $$\frac{11\cdot 10}{2}=55.$$ 2 pont

Vegyünk egy olyan 11 pontból álló ponthalmazt, amelyben semelyik három pont nincs egy egyenesen.

Legyen $A;B;C$ ezen ponthalmaz három eleme. Ha B helyett egy AC egyenesen lévő D pontot veszünk, akkor az AB helyett egy AC-vel egybeeső AD egyenest kapunk, valamint BC helyett egy ugyancsak AC-vel egybeeső DC-t.

Így az $\mathrm{A,D,C}$ pontok által meghatározott egyenesek száma három helyett egy lesz, vagyis 2-vel csökken. 2 pont

Ez azt jelenti, hogy elhelyezhető 11 pont úgy, hogy az általuk meghatározott egyenesek száma

$$55-2=53$$

legyen. 2 pont

b) Ha lenne a 11 pontnak olyan elhelyezkedése, hogy az általuk meghatározott egyenesek száma 54 volna, akkor biztosan lenne közöttük 3 olyan, amely egy egyenesre illeszkedik, ellenkező esetben az egyenesek száma (1) szerint 55 lenne. 1 pont

Legyen ez a három, egy egyenesre illeszkedő pont $A;B;C$! Ha a három pont közül az egyiket, például a B pontot lehúzzuk az egyenesről úgy, hogy közben ne kerüljön másik egyenesre, akkor új egyeneseket hozunk létre, mégpedig az AB és CB egyeneseket, és így az egyenesek száma 2-vel nő. 1 pont

Ekkor viszont 56 egyenes keletkezne, ami ellentmond annak, hogy a 11 pont által meghatározott egyenesek maximális száma 55.

Tehát 11 pontnak nincs olyan elhelyezkedése, amelynél az általuk meghatározott egyenesek száma 54 lenne. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Oldja meg a pozitív egész számokból álló számhármasok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\text{(a)} \quad x + y + z = 12,$$
$$\text{(b)} \quad xy + xz + yz = 47.$$

1. Megoldás:

Az (a) egyenletből az következik, hogy az $x; y; z$ pozitív egész számok egyike sem lehet 10-nél nagyobb.

Mivel a számok összege (a) miatt páros, a páronként vett szorzatok összege a (b) egyenlet szerint páratlan, ezért a három szám közül pontosan az egyik páros, a másik kettő páratlan. 1 pont

Az egyenletrendszer mindkét egyenlete szimmetrikus az $x; y; z$ ismeretlenekben, ezért ha kapunk megoldásként egy $x; y; z$ számhármast, akkor a számhármas összes permutációja is megoldás.

Ezért feltehetjük, hogy

$$x \le y \le z.$$ 1 pont

Ezen feltevés miatt az $x + y + z = 12$ egyenletből azt kapjuk, hogy

$$12 = x + y + z \ge 3x,$$

illetve

$$12 = x + y + z \le 3z,$$

amiből

(1) $x \le 4$,

és

(2) $z \ge 4$. 1 pont

Mivel x pozitív egész, ezért (1)-re való tekintettel x lehetséges értékei:

$$x = 1, \ x = 2, \ x = 3, \ x = 4.$$ 1 pont

Ha $x = 1$, akkor az (a) egyenletből

$$y + z = 11,$$

ennek pozitív egész megoldásai:

$y = 1; z = 10$, $y = 2; z = 9$, $y = 3; z = 8$,

$y = 4; z = 7$, $y = 5; z = 6$.

Kiesnek a lehetőségek közül, az $x \le y \le z$ miatt

$y = 6; z = 5$, $y = 7; z = 4$

$y = 8; z = 3$, $y = 9; z = 2$ és $y = 10; z = 1$.

A (b) egyenletből azt kapjuk, hogy

(3) $$yz = 47 - x(y + z).$$

Ebbe $x = 1$, és $y + z = 11$-et helyettesítve

$$yz = 36.$$

Azon y, z párok, amelyeket nem zártunk ki a lehetőségek közül, egyike sem elégíti ki ezt az egyenletet, tehát $x = 1$ mellett nincs megoldása a feladatnak. 2 pont

Ha $x = 2$, akkor az (a) egyenletből

$$y + z = 10,$$

ennek pozitív egész megoldásai

$y = 1; z = 9$, $y = 2; z = 8$, $y = 3; z = 7$,

$y = 4; z = 6$, $y = 5; z = 5$, $y = 6; z = 4$,

$y = 7; z = 3$, $y = 8; z = 2$, $y = 9; z = 1$.

Figyelembe véve a (2) és az $x \le y \le z$ feltételt, és azt, hogy, $x; y; z$ közül pontosan egy szám páros, csak

$$y = 3; z = 7$$

$$y = 5; z = 5$$

lehet megoldás.

Viszont ezek sem tesznek eleget a (3)-ból adódó

$$yz = 47 - 2 \cdot 10,$$

$$yz = 27$$

1 pont

egyenletnek, ezért $x = 2$ mellett sem kaptunk megoldást.

Ha $x = 3$, akkor az (a) egyenletből

$$y + z = 9,$$

ennek pozitív egész megoldásai

$y = 1; z = 8$, $y = 2; z = 7$, $y = 3; z = 6$,

$y = 4; z = 5$, $y = 5; z = 4$, $y = 6; z = 3$,

$y = 7; z = 2$, $y = 8; z = 1$.

Az $x \le y \le z$ feltétel miatt csak

$$y = 3; z = 6 \text{ és } y = 4; z = 5$$

lehet megoldás.

(3)-ból $x = 3$, $y + z = 9$ mellett azt kapjuk, hogy

$$yz = 20.$$

Ennek csak

$$y = 4; z = 5$$

tesz eleget.

Ez azt jelenti, hogy az

$$x = 3; y = 4; z = 5$$

számhármas, - és ezek összes lehetséges permutációja - megoldása a feladatnak.

1 pont

Ha $x=4$, akkor az (a) egyenletből

$$y+z=8,$$

ennek pozitív egész megoldásai

$y=1; z=7$, $y=2; z=6$, $y=3; z=5$,

$y=4; z=4$, $y=5; z=3$, $y=6; z=2$,

$y=7; z=1$. 1 pont

Figyelembe véve a paritásra vonatkozó feltételt, az $x \le y \le z$, és a (2) kikötéseket, ezek egyike sem ad megoldást.

Az egyenletrendszer összes megoldásai táblázatba foglalva:

x	**y**	**z**
3	4	5
3	5	4
4	3	5
4	5	3
5	3	4
5	4	3

1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

1) ha a versenyző nem alkalmazza az $x \le y \le z$ feltételt, hanem a megoldás során valamennyi szóba jövő egész számot kipróbálja, akkor helyes megoldási menet esetén megkapja a teljes pontszámot
2) ha a versenyző kitalálja a helyes számhármast, de nem indokolja, hogy csak ennek permutációi lehetnek megoldások, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat (1 pontot a számhármas ellenőrzéséért, 2 pontot a számhármas permutációiért)

2. Megoldás:

Az egyenletrendszer mindkét egyenlete szimmetrikus az $x; y; z$ ismeretlenekben, ezért ha kapunk megoldásként egy $x; y; z$ számhármast, akkor a számhármas összes permutációja is megoldás. 1 pont

Továbbá az (a) és (b) egyenletek szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kiszámítandó ismeretlenek közül a z a legnagyobb. 1 pont

Az (a) egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük:

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 144.$$ 1 pont

Az (1) egyenletbe a (b)-t behelyettesítve

(2) $$x^2 + y^2 + z^2 = 50$$

következik. 1 pont

Mivel $x; y; z$ pozitív egész számok, és z a legnagyobb, ezért (2) alapján $z < 7$, hiszen $z \geq 7$ mellett (2)-ből $x^2 + y^2 \leq 1$ következik, ez pedig egyetlen pozitív egész $x; y$ párra sem teljesül. 1 pont

A $z = 6$ eset sem fordulhat elő, mert abból $x^2 + y^2 = 14$ következik, de a 14-nél kisebb négyzetszámok $(1, 4, 9)$ semmilyen párosítása mellett sem lesz az összegük 14. 1 pont

A $z = 5$ esetben (2)-ből

(3) $$x^2 + y^2 = 25.$$

Ezt az egyenletet kielégítik az

$$x = 3; y = 4$$

és

$$x = 4; y = 3$$

számpárok, és csak ezek, tehát a feladat megoldását adó számhármasok lehetnek:

$$x = 3;\ y = 4;\ z = 5,$$

és

$$x = 4;\ y = 3;\ z = 5.$$

2 pont

A $z < 5$ eset nem állhat fenn, mert ha z a legnagyobb, akkor $x < z$, $y < z$ miatt

$$z \le 4,$$

$$y \le 4,$$

$$x \le 4,$$

amiből

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 3 \cdot 16,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 48$$

lenne, ami ellentmond (2)-nek.

1 pont

A összes megoldás tehát

x	***y***	***z***
3	4	5
3	5	4
4	3	5
4	5	3
5	3	4
5	4	3

A táblázatbeli számhármasok, és csak ezek a feladat feltételeinek megfelelő megoldások.

1 pont

Összesen: 10 pont

3. Megoldás:

(a)-ból következik, hogy

(1) $$x, y, z \in [1,10].$$

(a)-t átalakítva

(2) $$y + z = 12 - x,$$ 1 pont

továbbá (b)-ből

$$yz = 47 - x(y + z),$$

amiből figyelembe véve (2)-t

(3) $$yz = 47 - x(12 - x) = 47 - 12x + x^2.$$ 1 pont

a Viete formulák alapján y és z olyan másodfokú egyenlet gyökei, melyben

$$a = 1,$$

$$b = -(y + z) = x - 12,$$

$$c = yz = 47 - 12x + x^2.$$

Az

$$u^2 + (x - 12)u + (47 - 12x + x^2) = 0$$ 1 pont

egyenletnek akkor lehet $u_1 = y$, $u_2 = z$-re megoldása, ha diszkriminánsa nem negatív. Ekkor

$$y = \frac{12 - x + \sqrt{D}}{2} \text{ és } z = \frac{12 - x - \sqrt{D}}{2}.$$ (Vagy fordítva.) 1 pont

Ezért kiszámítjuk D-t:

$$D = b^2 - 4ac,$$

$$D = (x - 12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (47 - 12x + x^2),$$

$$D = x^2 - 24x + 144 - 188 + 48x - 4x^2,$$

(4) $$D = -3x^2 + 24x - 44.$$ 1 pont

A valós gyök létezésének szükséges feltétele az, hogy

$$D \geq 0$$

legyen.

Megkeressük D zérushelyeit:

$$-3x^2 + 24x - 44 = 0,$$

$$x_{12} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 528}}{-6},$$

$$x_1 \approx 2{,}84,$$

$$x_2 \approx 5{,}15.$$

1 pont

Ezért a lehetséges egész x-ekre

$$x \in \{3, 4, 5\}.$$

1 pont

Figyelembe véve (2)-t, (3)-at és (4)-et

x	***y+z***	***yz***	***D***	***y***	***z***
3	9	20	1	4 vagy 5	5 vagy 4
4	8	15	4	5 vagy 3	3 vagy 5
5	7	12	1	3 vagy 4	4 vagy 3

2 pont

Így az összes számhármas:

$$(3,\ 4,\ 5),$$

$$(3,\ 5,\ 4),$$

$$(4,\ 5,\ 3),$$

$$(4,\ 3,\ 5),$$

$$(5,\ 3,\ 4),$$

$$(5,\ 4,\ 3).$$

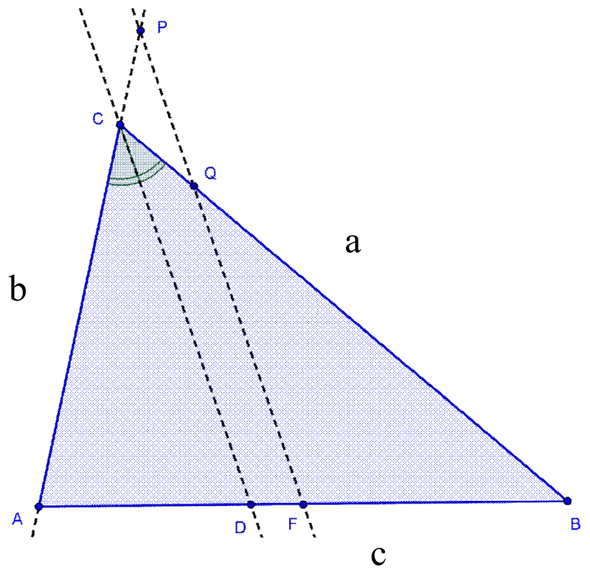
<u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

4. A nem egyenlőszárú ABC háromszögben $BC > CA$. Az AB oldal F felezőpontján keresztül húzzunk párhuzamost a C pontbeli belső szögfelezővel, ez az egyenes az AC egyenest a P, a BC egyenest a Q pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{BC}{AC} - \frac{PQ}{QF} = 1!$$

Megoldás:



1. ábra

Az 1. ábrán látható jelölések szerint az ABC háromszög oldalainak hossza $BC = a$; $CA = b$ és $AB = c$.

A feltétel szerint $BC > CA$, ezért nyilvánvaló, hogy a C pontbeli belső szögfelezőnek az AB oldallal való D metszéspontja közelebb van az A ponthoz, mint a B ponthoz. 1 pont

A fenti jelölésekkel felírhatjuk a háromszögre a belső szögfelező tételét:

(1) $$\frac{AD}{c - AD} = \frac{b}{a}.$$

(1)-ben elvégezve a műveleteket, rendezés után

(2) $$AD = \frac{b \cdot c}{a + b},$$

illetve

(3) $$BD = c - AD = \frac{a \cdot c}{a+b}.$$ 2 pont

A $BAC\angle$-et a CD és PQF párhuzamosokkal metszettük el, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint:

(4) $$\frac{PF}{CD} = \frac{AF}{AD}.$$

Mivel

$$AF = \frac{c}{2},$$

ezért (4)-ből

$$PF = CD \cdot \frac{c}{2 \cdot AD}$$

következik. 1 pont

(2) szerint

$$AD = \frac{b \cdot c}{a+b},$$

ezért

(5) $$PF = CD \cdot \frac{a+b}{2b}.$$ 1 pont

Az $ABC\angle$-et is ugyanezen párhuzamosokkal metszettük el, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint:

(6) $$\frac{QF}{CD} = \frac{BF}{BD}.$$

(6)-ból $BF = \frac{c}{2}$ felhasználásával

$$QF = CD \cdot \frac{c}{2 \cdot BD}$$

adódik. 1 pont

Ezt összevetve (3)-mal, azt kapjuk, hogy

(7) $$QF = CD \cdot \frac{a+b}{2a}.$$ 1 pont

(5) és (7) alapján

$$\frac{PF}{QF} = \frac{CD \cdot \frac{a+b}{2b}}{CD \cdot \frac{a+b}{2a}},$$

$$\frac{PF}{QF} = \frac{a}{b}.$$

De

$$PF = PQ + QF,$$

ezért

$$\frac{PQ + QF}{QF} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{PQ}{QF} + 1 = \frac{a}{b}.$$

2 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\frac{a}{b} - \frac{PQ}{QF} = 1,$$

vagyis

$$\frac{BC}{AC} - \frac{PQ}{QF} = 1,$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{\sqrt{2012-503x}-|3x-2|}{\sqrt{2x+12}-|3x-2|}\le 1$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

A számlálóban és a nevezőben levő négyzetgyökös kifejezések csak akkor értelmezhetők, ha

$$-6\le x\le 4.$$ 1 pont

A nevezőben levő különbség értéke nem lehet zérus, azaz

$$\sqrt{2x+12}-|3x-2|\ne 0,$$

innen pedig:

$$\sqrt{2x+12}\ne |3x-2|.$$

Ebben mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás.

A műveletek elvégzése után:

$$9x^2-14x-8\ne 0,$$

és ezzel

$$x\ne -\frac{4}{9}\text{, illetve } x\ne 2.$$

Az egyenlőtlenség tehát azokra az x-ekre értelmezhető, melyekre

(1) $$x\in\left[-6;-\frac{4}{9}\right[\cup\left]-\frac{4}{9};2\right[\cup\left]2;4\right]$$ 1 pont

Válasszuk két részre a megoldást az egyenlőtlenség nevezőjének előjele szerint:

(2) $$\sqrt{2x+12}-|3x-2|>0,$$

vagy

(3) $$\sqrt{2x+12}-|3x-2|<0.$$ 1 pont

a)

A (2) egyenlőtlenség átrendezés után

$$\sqrt{2x+12}>|3x-2|$$

alakban írható.

A kapott egyenlőtlenségben mindkét oldal nemnegatív, a négyzetreemelés tehát ekvivalens átalakítás, így rendezés után a

$$9x^2-14x-8<0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek megoldásai:

(4) $$-\frac{4}{9}<x<2.$$ 1 pont

A (2)-ből adódó (4) feltétel mellett megszorozzuk az eredeti egyenlőtlenség mindkét oldalát a bal oldali tört nevezőjével.

Ekkor

$$\sqrt{2012-503x}-|3x-2|\le\sqrt{2x+12}-|3x-2|,$$

amelyből ekvivalens átalakítással kapjuk, hogy:

(5) $$\sqrt{2012-503x}\le\sqrt{2x+12}.$$

Az (5) egyenlőtlenségben mindkét oldal nemnegatív, ezért négyzetre emelhetünk.

Az (5) megoldásai az

$$x\ge\frac{400}{101}$$

egyenlőtlenségnek megfelelő valós számok. 1 pont

Az $x\ge\frac{400}{101}$ és a (4) feltételt egyszerre egyetlen valós szám sem elégíti ki, ezért a (2) feltétel mellett nem kaptunk megoldást. 1 pont b)

A (3) egyenlőtlenség átrendezés után

$$\sqrt{2x+12} < |3x-2|$$

alakban írható.

Ebben az egyenlőtlenségben mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás.

A műveletek elvégzése és rendezés után a

$$9x^2 - 14x - 8 > 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek megoldásai azok az x-ek, melyekre

(6) $$x \in \left]-\infty; -\frac{4}{9}\right[\cup \left]2; \infty\right[.$$ 1 pont

A (3)-ból kapott (6) feltétel mellett megszorozzuk az eredeti egyenlőtlenség mindkét oldalát a bal oldali tört nevezőjével.

Ebből

$$\sqrt{2012-503x} - |3x-2| \geq \sqrt{2x+12} - |3x-2|$$

egyenlőtlenség adódik.

Ekvivalens átalakítássokkal:

(7) $$\sqrt{2012-503x} \geq \sqrt{2x+12}\,.$$

A (7) egyenlőtlenség megoldásai az

$$x \leq \frac{400}{101}$$

egyenlőtlenségnek megfelelő valós számok. Ezeket a (6) feltétellel összevetve a

(8) $$x \in \left]-\infty; -\frac{4}{9}\right[\cup \left]2; \frac{400}{101}\right]$$

valós számokat kapjuk. 1 pont

Figyelembe véve az értelmezési tartományt, (1)-et

$$x \in \left[-6; -\frac{4}{9}\right[\cup \left]-\frac{4}{9}; 2\right[\cup \left]2; 4\right]$$

adódik, hogy az eredeti egyenlőtlenségnek azok, és csak azok az x-ek, melyekre

(9) $$x \in \left[-6; -\frac{4}{9}\right[\cup \left]2; \frac{400}{101}\right].$$ 1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a (9)-nek megfelelő valós számok az eredeti egyenlőtlenség megoldásai. 1 pont

Összesen: 10 pont

6. Az x és y pozitív valós számok szorzata 50, továbbá teljesül, hogy $x > y$.

Határozza meg az $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ kifejezés minimumának értékét!

Adja meg az $\frac{x}{y}$ aránynak azt az értékét, amelyre a kifejezés a minimumát valóban felveszi!

Megoldás:

Az $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ kifejezés mindig pozitív, ha $x > y$.

Ekvivalens átalakítással kapjuk:

(1)
$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}.$$
1 pont

Az (1)-ből adódik, hogy:

(2)
$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = (x-y)+\frac{2xy}{x-y}.$$
1 pont

Átalakítjuk (2) jobboldalát

(3)
$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = 2\frac{(x-y)+\frac{2xy}{x-y}}{2}.$$

Mivel az $x > y$ feltétel miatt $(x-y)$ és $\frac{2xy}{x-y}$ is pozitív, ezért alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget: 1 pont

(4)
$$\frac{(x-y)+\frac{2xy}{x-y}}{2} \ge \sqrt{(x-y)\cdot\frac{2xy}{x-y}}.$$

$$\frac{(x-y)+\frac{2xy}{x-y}}{2} \ge \sqrt{2xy},$$

$$\frac{(x-y)+\dfrac{2xy}{x-y}}{2} \geq \sqrt{100}\,,$$

(5) $$\frac{(x-y)+\dfrac{2xy}{x-y}}{2} \geq 10\,.$$ 1 pont

(1 , (2), (3), (4) és (5)-ből az következik, hogy

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\cdot 10$$

vagyis

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 20\,.$$ 1 pont

Egyenlőség pontosan akkor van, ha a számtani és mértani középben szereplő mennyiségek egyenlők, azaz, ha:

$$(x-y)=\frac{2xy}{x-y}\,.$$ 1 pont

rendezés után

(6) $$x^2-4xy+y^2=0\,.$$ 1 pont

Mivel y pozitív, ezért, $y^2>0$, ezért (6) mindkét oldalát oszthatjuk vele:

$$\frac{x^2}{y^2}-4\frac{x}{y}+1=0\,.$$

Az $\frac{x}{y}=z$ jelölés bevezetésével a

(7) $$z^2-4z+1=0$$ 1 pont

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei

$$z_1=2+\sqrt{3} \text{ és } z_2=2-\sqrt{3}\,.$$ 1 pont

A $z_2=2-\sqrt{3}$ nem megoldása a feladatnak, mert az x és y pozitív számok, továbbá $x > y$, és így szükségképpen $\frac{x}{y} > 1$, márpedig a $z_2 = \frac{x}{y} = 2 - \sqrt{3}$ szám kisebb 1-nél.

Az $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$ kifejezés minimumának értéke tehát 20, és ezt a minimumot az $\frac{x}{y} = 2 + \sqrt{3}$ arány esetén veszi fel. 1* pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Az $x \cdot y = 50$ és az $\frac{x}{y} = 2 + \sqrt{3}$ arány alapján az x és y pozitív számok kiszámolhatók, a számolás eredménye:

$$x = 5 \cdot \sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{3}} = 5\left(\sqrt{3} + 1\right),$$

és

$$y = 5 \cdot \sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{3}} = 5\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Ha a versenyző erre a megoldásra jut más úton, de az $\frac{x}{y} = 2 + \sqrt{3}$ arányt nem írja föl, akkor az utolsó (1* pont) pontot nem kapja meg.