Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2010–2011-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

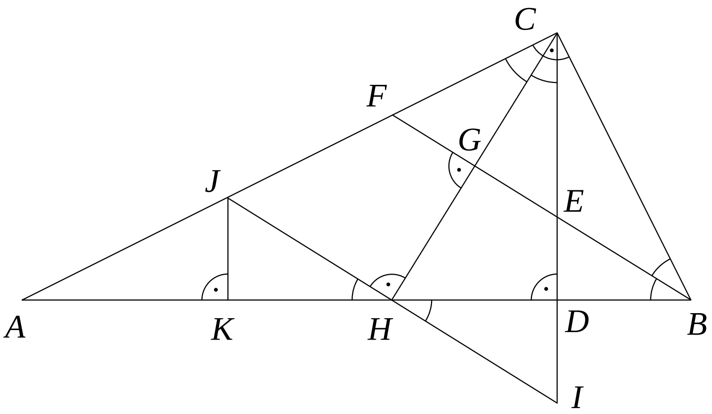
a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

A döntő feladatainak megoldásai

1. feladat

Az ABC derékszögű háromszög C csúcsából induló magasságának talppontja az AB átfogón D. A B csúcsból induló szögfelelző a CD magasságot az E, az AC befogót az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AD > 2 \cdot EF$.

Első megoldás: Az ábrán megrajzoltuk az ACD szög CH szögfelezőjét, és erre a H pontban merőlegest állítva kaptuk az IJ szakaszt.



Az FBC és HCA szögek egyenlősége folytán a G metszéspontban is derékszög van. Így GB a CHB egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye. Ezért $CH = 2 \cdot CG$, ahonnan $IJ = 2 \cdot EF$ következik. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $IJ < AD$.

A JIC háromszög területe $IJ \cdot CH/2$, az ADC háromszögé $AD \cdot CD/2$. A két terület közül a második a nagyobb, ugyanis a HID háromszög egybevágó a HJK háromszöggel, ezért a JIC háromszög a $KDCJ$ négyszöggel egyenlő területű, ez utóbbi pedig kisebb az ADC háromszögnél. A magasságok között nyilván fennáll a $CH > CD$ egyenlőtlenség, ezért az alapokra $IJ < AD$ valóban teljesül.

Megjegyzés: Az $IJ < AD$ egyenlőtlenségben ráismerhetünk annak a jól ismert ténynek a speciális esetére, amely szerint egy konvex szögtartomány szimmetriatengelyének valamely pontján keresztül húzható szelőszakaszok közül az, amelyik a szögfelezőre merőleges, rövidebb az összes többinél.

Második megoldás: Az első megoldásbeli A, B, …, H pontokra használjuk ugyanazokat a jelöléseket, az oldalhosszakat és az ABC szöget pedig a szokásos módon jelölje a, b, c, illetve β. Mivel G-nél derékszög van (lásd az első megoldást), az FEC háromszög egyenlő szárú és hasonló a CHB háromszöghöz. A két háromszögben a szárak $ab/(a+c)$, illetve a hosszúságúak, ezért az alapok is ilyen arányban állnak, vagyis

$$EF = CH \cdot \frac{b}{a+c} = 2a \sin\frac{\beta}{2} \cdot \frac{b}{a+c}\,.$$

Ugyanakkor

$$AD = b\sin\beta = 2b\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,.$$

A bizonyítandó $AD > 2\cdot EF$ egyenlőtlenség tehát a

$$\cos\frac{\beta}{2} > \frac{2a}{a+c}$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. További egyenértékű átalakításokkal:

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{\beta}{2} &> \frac{4a^2}{(a+c)^2}\\
1+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} &< \frac{(a+c)^2}{4a^2}\\
1+\frac{b^2}{(a+c)^2} &< \frac{(a+c)^2}{4a^2}\\
\frac{a^2+b^2+c^2+2ac}{(a+c)^2} &< \frac{(a+c)^2}{4a^2}\\
\frac{2c^2+2ac}{(a+c)^2} &< \frac{(a+c)^2}{4a^2}\\
8a^2c &< (a+c)^3\\
0 &< a^3-5a^2c+3ac^2+c^3\\
0 &< (c-a)(c^2-a^2+4ac)
\end{aligned}$$

Mivel $c > a$, mindkét tényező pozitív, és az egyenlőtlenség valóban teljesül.

Megjegyzés: A $2a/(a+c)$ mennyiség éppen az 1 és az $a/c = \cos\beta$ számok harmonikus közepe. Így a harmonikus és a számtani közép közti egyenlőtlenségből rövidebb úton is megkaphatjuk a kívánt egyenlőtlenséget: $2a/(a+c) < (1+\cos\beta)/2 = \cos^2(\beta/2) < \cos(\beta/2)$.

2. feladat

Van-e olyan pozitív egész, amelynek pozitív osztói között 2011-szer annyi négyzetszám van, mint köbszám?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy bármely $r > 0$ egész esetén van olyan pozitív egész, melynek pozitív osztói között r-szer annyi négyzetszám van, mint köbszám.

Jelölje $N(c)$, illetve $K(c)$ a c természetes szám pozitív osztói közül a négyzetszámok, illetve köbszámok számát. Ha c törzstényezős felbontása $c = p_1^{\alpha_1}\cdots p_j^{\alpha_j}$, akkor a négyzetszámosztók éppen a $p_1^{2\beta_1}\cdots p_j^{2\beta_j}$ alakú számok, ahol $0 \le 2\beta_i \le \alpha_i$, $1 \le i \le j$, így ezek száma

$$N(c) = (\lfloor\alpha_1/2\rfloor+1)\dots(\lfloor\alpha_j/2\rfloor+1)\,.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$K(c) = (\lfloor\alpha_1/3\rfloor+1)\dots(\lfloor\alpha_j/3\rfloor+1)\,.$$

A képletből azonnal adódik, hogy ha $(a, b) = 1$, akkor $N(ab) = N(a)N(b)$ és $K(ab) = K(a)K(b)$, továbbá tetszőleges p prím esetén

$$N(p^{6k}) = 3k+1, \quad N(p^{6k+2}) = 3k+2 \quad \text{és} \quad N(p^{6k+4}) = 3k+3\,,$$

illetve

$$K(p^{6k}) = K(p^{6k+2}) = 2k+1 \quad \text{és} \quad K(p^{6k+4}) = 2k+2\,.$$

Így a $h(c) = N(c)/K(c)$ jelöléssel egyrészt $(a, b) = 1$ esetén $h(ab) = h(a)h(b)$, másrészt

$$h(p^{6k}) = \frac{3k+1}{2k+1}, \quad h(p^{6k+2}) = \frac{3k+2}{2k+1} \quad \text{és} \quad h(p^{6k+4}) = \frac{3k+3}{2k+2} = \frac{3}{2}\,.$$

Azt kell igazolnunk, hogy $h(c)$ értékkészletében minden $s > 0$ egész szerepel. Teljes indukcióval okoskodunk, $s = 1$-re pl. $h(1) = 1$.

Tegyük fel, hogy $s > 1$, és minden $r < s$ esetén igaz az állítás. Ha $s = 3k+2$, akkor bármely p prímre $h(p^{6k+2}) = (3k+2)/(2k+1)$. Mivel $2k+1 < 3k+2$, az indukciós feltevés szerint van olyan d, amelyre $h(d) = 2k+1$. Így ha $(p, d) = 1$, akkor $c = p^{6k+2}d$-re $h(c) = ((3k+2)/(2k+1)) \cdot (2k+1) = 3k+2 = s$.

Hasonlóan kell eljárnunk az $s = 3k+3$ és $s = 3k+1$ esetben is, ekkor p^{6k+4}-ból, illetve p^{6k}-ból kell elindulni.

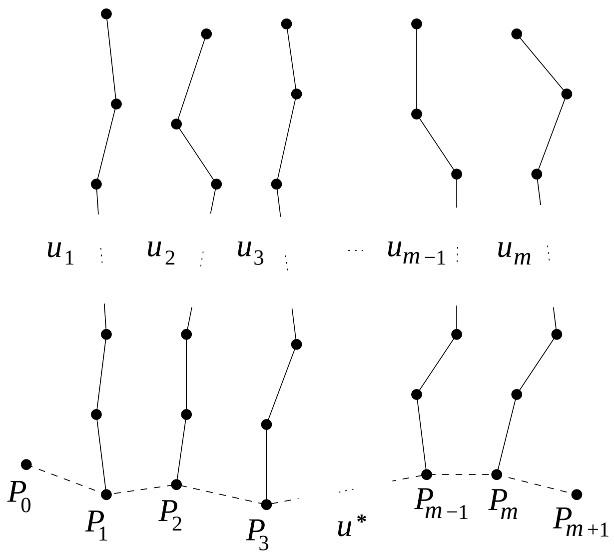
3. feladat

Anna és Bálint a következő játékot játsszák: Anna rajzol egy tetszőlegesen nagy üres (azaz él nélküli) gráfot, majd egyesével behúz tetszőleges éleket, amelyeket Bálint közvetlenül a behúzás után kékre vagy pirosra színez. További szabály, hogy az így keletkező gráfban minden csúcs foka legfeljebb k lehet, és k értékében előre megállapodnak. Melyik az a legkisebb k, amely mellett Anna ügyes játékkal mindenképpen létre tud hozni egy 2011 hosszúságú egyszínű utat?

Megoldás: Ha $k = 1$, illetve $k = 2$, akkor Anna csak közös csúcs nélküli éleket, illetve köröket és utakat tud rajzolni, és ha ez utóbbiak éleit Bálint váltakozva színezi kékre és pirosra, akkor legfeljebb 2 hosszúságú egyszínű utak keletkeznek (a 2 a páratlan körökkel érhető el).

Megmutatjuk, hogy $k = 3$-ra viszont már létrehozható bármilyen hosszú egyszínű út. Pontosabban azt fogjuk igazolni, hogy ha valamely m-re létrehozható olyan m hosszúságú egyszínű út, amelynek a végpontjai elsőfokú pontok, akkor van olyan $n > m$, amelyre n hosszúságú ilyen út is létrehozható. Innen az állítás teljes indukcióval adódik, hiszen 1 hosszúságú egyszínű út nyilván létrehozható, továbbá ha az esetlegesen „túl hosszú" egyszínű utaknál az egyik végponttól indulva alkalmas számú élt figyelmen kívül hagyunk, akkor az indukciós lépésnek megfelelő hosszúságú egyszínű utat kaphatunk.

Anna elkészít $2m-1$ darab m hosszúságú egyszínű utat, amelyek közül semelyik kettőnek sincs közös pontja és amelyek végpontjai elsőfokúak. A skatulyaelv alapján ezen utak közül legalább m azonos színű, mondjuk kék, legyenek ezek $u_1, u_2, \ldots, u_m$, az egyik



végpontjuk pedig $P_1, \ldots, P_m$. Ezután Anna vesz két „új" pontot (amelyekből eddig nem indult él), legyenek ezek P_0 és P_{m+1}, majd elkészíti az $u^* = P_0P_1P_2 \ldots P_mP_{m+1}$ utat.

Ha Bálint a P_0P_1 élt kékre színezi, akkor ez az él u_1-gyel együtt egy $m+1$ hosszúságú kék utat alkot, amelynek végpontjai elsőfokúak. Ugyanez a helyzet, ha a P_mP_{m+1} él kék. Ha u^* valamelyik másik éle kék, pl. P_1P_2, akkor u_1-et a P_1 elé, u_2-t a P_2 után fűzve egy $2m+1$ hosszúságú kék utat kapunk, amelynek végpontjai elsőfokúak. Végül, ha u^* minden éle piros, akkor u^* lesz egy olyan $m+1$ hosszúságú út, amelynek minden éle azonos színű és a végpontjai elsőfokúak.