Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2010/2011

Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

3. (döntő) forduló

A 3. (döntő) forduló feladatainak megoldása

1. **Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!**

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2010}+\sqrt{x+2011}}=1$$

<u>Megoldás:</u> Az első tört nevezőjének első tagjából a négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq 0$.

Ekkor az összes többi négyzetgyök alatt pozitív szám áll, tehát minden gyökös kifejezés értelmezett.

Továbbá a négyzetgyökös kifejezések mindegyikének értéke pozitív (legfeljebb az első lehet 0), így a törtek nevezői mind pozitívak, vagyis a törtek mindegyike értelmezett. 2 pont

Gyöktelenítsük az egyes törtek nevezőit!

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x+2-(x+1)}=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1},$$

…,

$$\frac{1}{\sqrt{x+2010}+\sqrt{x+2011}}=\frac{\sqrt{x+2011}-\sqrt{x+2010}}{\left(\sqrt{x+2011}-\sqrt{x+2010}\right)\left(\sqrt{x+2011}+\sqrt{x+2010}\right)}=$$

$$=\sqrt{x+2011}-\sqrt{x+2010}.$$ 3 pont

Ezek segítségével az eredeti egyenlet a következő alakban írható:

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})+...+(\sqrt{x+2010}-\sqrt{x+2009})+(\sqrt{x+2011}-\sqrt{x+2010})=1.$$ 1 pont

Összevonás után:

$$-\sqrt{x}+\sqrt{x+2011}=1,$$

rendezve:

$$\sqrt{x+2011}=\sqrt{x}+1,$$

négyzetre emelve – mivel mindkét oldal pozitív – ekvivalens átalakítást végzünk:

$$x+2011=x+2\sqrt{x}+1,$$

amiből rendezéssel

$$\sqrt{x}=1005,$$

azaz

$$x=1005^2=(1010025).$$ 3 pont

Ez eleget tesz az $x \geq 0$ feltételnek, és mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért az $x=1005^2$ valós szám megoldása a kiinduló egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Egy ládában almák vannak, amelyek közül néhány megromlott. Ha kiemelünk 11 hibás almát, akkor az eredetihez képest felére tudjuk csökkenteni annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kivéve egy almát, a kivett alma hibás legyen. Hány jó alma lehetett a ládában?

Megoldás:

Legyen a ládában eredetileg levő összes almák száma n, a hibás almák száma h. Így a jó almák száma $n-h$, ahol:

(1) $n \in N^+, \quad n > 11, \quad h \in N^+, \quad h > 11, \quad n-h > 0 \quad (n > h).$ 1 pont

Annak a valószínűsége, hogy egy almát véletlenszerűen kivéve a ládából, a kivett alma hibás,

$$P_1 = \frac{h}{n}.$$

Ha ezután eltávolítunk 11 hibás almát, akkor a ládában levő összes almák száma $n-11$, a hibás almák száma $h-11$ lesz.

Ezután a hibás alma kiválasztásának valószínűsége

$$P_2 = \frac{h-11}{n-11}.$$ 1 pont

A feltétel szerint

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot P_1,$$

azaz

$$\frac{h-11}{n-11} = \frac{h}{2n},$$ 1 pont

amiből

(2) $h \cdot n - 22n + 11h = 0.$

A (2) egyenlet bal oldalát szorzattá bonthatjuk, ha mindkét oldalából 242-t kivonunk

(3) $h \cdot n - 22n + 11h - 242 = -242$,

(3) $(h-22)\cdot(n+11) = -242$. 2* pont

A bal oldali szorzat mindkét tényezője egész szám, de a feltételek miatt nyilvánvaló, hogy $n+11>0$, ezért $h-22<0$.

Ez azt jelenti, hogy a $h-22$ a 242 szám negatív osztója, és (1)-et is figyelembe véve

(4) $11<h<22$ és $n>11$. 1* pont

Mivel $242 = 2\cdot 11^2$, így $h-22$ értékeit , és az ebből (3) alapján következő n, h, valamint $\mathrm{n-h}$ értéket táblázatba foglalhatjuk:

h-22	-1	-2	-11	-22	-121	-242
h	21	20	11	0	-99	-220
n+11	242	121	22	11	2	1
n	231	110	11	0	-9	-10
n-h	210	90	0	0	90	210

2* pont

A (4) feltételnek csak a táblázat első és második oszlopa felel meg.

Ezért a feladatnak két megoldása van: vagy 210 vagy 90 jó alma lehetett a ládában. 1 pont

Ellenőrzés:

n-h	*h*	*n*	P_1	P_2	$P_2=\frac{1}{2}P_1$
210	21	231	$\frac{21}{231}=\frac{1}{11}$	$\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}$
90	20	110	$\frac{20}{110}=\frac{2}{11}$	$\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{11}$

1 pont

Összesen: 10 pont

1. Megjegyzés:

Ha a versenyző (3) helyett a szorzattábontást

$$(n+11)(22-h)=242$$

alakban adja meg, akkor figyelembe véve (1)-ből $n>11$, azaz $n+11>22$-t, így n+1 értéke 242-nek csak 22-nél nagyobb osztója lehet:

n+11	**242**	**121**
22-h	**1**	**2**
n	**231**	**110**
h	**21**	**20**
n-h	**210**	**90**

Erre is járnak a *-gal megjelölt pontok.

2. Megjegyzés:

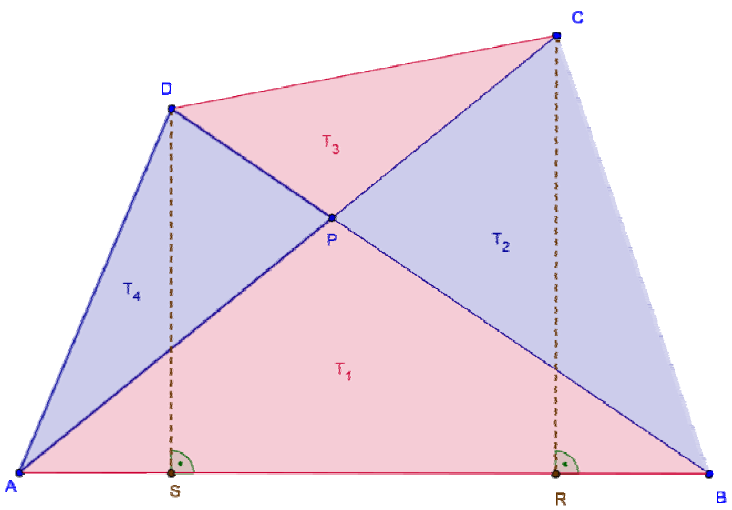
Ha a versenyző (2)-ből

$$n=-11-\frac{242}{h-22}$$

átalakítást végzi és így keresi meg az (1) feltételnek eleget tevő megoldásokat. (h-22/242-t elemezve), akkor is teljes a megoldása.

3. **Az** $ABCD$ **konvex négyszög** AC **és** BD **átlóinak metszéspontja** P**.** **Legyen az** APB **, illetve** CPD **háromszögek területe** T_1**, illetve** T_3**!**
Az $ABCD$ **négyszög** T **területére teljesül, hogy** $T=\left(\sqrt{T_1}+\sqrt{T_3}\right)^2$**.**
Igazolja, hogy az $ABCD$ **négyszög trapéz!**

Megoldás: jelöléseink az ábrán láthatók.



1. ábra

A BCP háromszög területét T_2-vel, az APD háromszög területét T_4-gyel jelöltük.

Az ABP és PBC háromszögek B csúcshoz tartozó magassága közös, így a két háromszög területének aránya az AP és PC alapok arányával egyenlő, azaz:

(1) $$\frac{T_1}{T_2}=\frac{AP}{PC}.$$

Hasonlóan egyszerű módon látható be, hogy:

(2) $$\frac{T_4}{T_3}=\frac{AP}{PC}.$$

Az (1) és (2) összefüggések szerint

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{T_4}{T_3},$$ 1 pont

amelyből

(3) $$T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_4$$

következik.

A feltétel szerint

$$T = \left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_3}\right)^2,$$ 1 pont

ebben a négyzetreemelést elvégezve

(4) $$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_3 + 2\sqrt{\mathrm{T}_1 \cdot \mathrm{T}_3}\,.$$

Ugyanakkor a terület fogalma miatt

(5) $$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4\,.$$

(4) és (5) egybevetéséből

(6) $$T_2 + T_4 = 2\sqrt{T_1 \cdot T_3}\,.$$

(3-at ide behelyettesítve

(7) $$\mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_4 = 2\sqrt{\mathrm{T}_2 \cdot \mathrm{T}_4}\,,$$ 2 pont

átrendezve

$$\mathrm{T}_2 - 2\sqrt{\mathrm{T}_2 \cdot \mathrm{T}_4} + \mathrm{T}_4 = 0\,,$$

$$\left(\sqrt{\mathrm{T}_2} - \sqrt{\mathrm{T}_4}\right)^2 = 0\,,$$ 2 pont

ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\sqrt{\mathrm{T}_2} = \sqrt{\mathrm{T}_4}\,,$$

(8) $$T_2 = T_4\,.$$ 1 pont

De akkor

$$\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_4\,,$$

azaz

(9) $$T_{ABC} = T_{ABD}.$$ 1 pont

Az ABD és ABC háromszögek AB oldala közös, ezért a területek egyenlősége miatt a két háromszögben az ehhez az oldalhoz tartozó magasságok egyenlő hosszúak, vagyis az 1. ábra jelöléseivel

(10) $$CR = DS.$$ 1 pont

(10) éppen azt jelenti, hogy a D és C pontok egyenlő távolságra vannak az AB egyenesétől, tehát a DC egyenese párhuzamos az AB egyenesével.

Az $ABCD$ négyszög két szemben levő oldala tehát párhuzamos, ezért az $ABCD$ négyszög valóban trapéz.

Összesen: 1 pont

10 pont

1. Megjegyzés:

(7)-ből (8)-ra következtethetünk úgy is, hogy átírjuk (7)-et

$$\frac{T_2 + T_4}{2} = \sqrt{T_2 \cdot T_4},$$

és a számtani- és mértani közép közti egyenlőségből

$$T_2 = T_4$$

adódik.

2. Megjegyzés:

Ha a tétel megfordítását igazolja, akkor 0 pontot kap a versenyző.