Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2008–2009-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

A döntő feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tetszőleges pozitív számok, akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i = \infty \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i/i^2 = \infty$$

közül legalább az egyik teljesül. (Pozitív $c_1, c_2, \ldots$ számok esetén $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty$ azt jelenti, hogy az $s_k = c_1 + c_2 + \ldots + c_k$ összegek k növekedésével minden határon túl nőnek.)

2. Vetítsük az $ABCD$ szabályos tetraédert merőlegesen egy a térben fekvő számegyenesre, és legyenek a csúcsok vetületei rendre az a, b, c, d valós számok. Fejezzük ki a tetraéder élhosszát a, b, c és d segítségével.

3. Egy nap egy méhraj egy különlegesen szép fa virágjairól gyűjtötte a mézet. Minden méhecske legfeljebb 100-szor látogatott el a fához, kettőnél többen sohasem voltak egyszerre ott, de bármelyik két méhecske találkozott valamikor egymással a fánál. Maximálisan hány méhecskéből állhatott a méhraj?

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2008–2009-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

A döntő feladatainak megoldásai

1. feladat.

Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tetszőleges pozitív számok, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i = \infty$ és $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/i^2 = \infty$ közül legalább az egyik teljesül. (Pozitív $c_1, c_2, \ldots$ számok esetén $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty$ azt jelenti, hogy az $s_k = c_1 + c_2 + \ldots + c_k$ összegek k növekedésével minden határon túl nőnek.)

Megoldás: Tegyük fel indirekt, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i < \infty$ és $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/i^2 < \infty$, azaz van olyan T szám, amellyel minden k-ra

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} < T \quad \text{és} \quad a_1 + \frac{a_2}{4} + \ldots + \frac{a_k}{k^2} < T. \tag{1}$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_i} + \frac{a_i}{i^2}\right) \geq \sqrt{\frac{1}{a_i} \cdot \frac{a_i}{i^2}} = \sqrt{\frac{1}{i^2}} = \frac{1}{i}.$$

Ezt $i = 1$-től k-ig összegezve, (1) felhasználásával kapjuk, hogy bármely k-ra

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} + a_1 + \frac{a_2}{4} + \ldots + \frac{a_k}{k^2}\Big) < T. \tag{2}$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán álló összeg (az $1+(1/2)+(1/3)+\ldots+(1/k)+\ldots$ úgynevezett *harmonikus sor* kezdőszelete) azonban minden határon túl nő:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^r+1} + \ldots + \frac{1}{2^{r+1}} > 2^r \cdot \frac{1}{2^{r+1}} = \frac{1}{2}$$

alapján

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^j} \geq \frac{j+2}{2}.$$

Ez $j \geq 2T - 2$ esetén ellentmond (2)-nek.

2. feladat.

Vetítsük az $ABCD$ szabályos tetraédert merőlegesen egy a térben fekvő számegyenesre, és legyenek a csúcsok vetületei rendre az a, b, c, d valós számok. Fejezzük ki a tetraéder élhosszát a, b, c és d segítségével.

Első megoldás: Legyen a keresett élhossz $e = \sqrt{2}m$. Foglaljuk a tetraédert egy m élhosszú kockába, amelyben a tetraéder élei lapátlók. Vegyük fel a térben azt a koordinátarendszert, amelyben A az origó, a B, C, D csúcsok koordinátái pedig rendre $(0, m, m)$, $(m, 0, m)$, illetve $(m, m, 0)$, azaz a tengelyek a kocka origóból kiinduló éleinek irányába mutatnak.

Toljuk el a számegyenest önmagával párhuzamosan úgy, hogy az origója az A pontba kerüljön. Ekkor a B, C, D pontok vetületei rendre $(b-a)$, $(c-a)$ és $(d-a)$ lesznek. Legyenek a számegyenes 1 pontjának koordiánátái (α, β, γ), ekkor persze

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

A B pont vetülete a számegyenesen az $\overrightarrow{AB}$ vektornak és az (α, β, γ) vektornak a skaláris szorzata; hasonló érvényes a C és D pontokra. Ezért

$$\begin{aligned} m \cdot \beta + m \cdot \gamma &= b - a \\ m \cdot \alpha + m \cdot \gamma &= c - a \\ m \cdot \alpha + m \cdot \beta &= d - a. \end{aligned}$$

Innen $m \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = (b + c + d - 3a)/2$, vagyis

$$\begin{aligned} m\alpha &= (c + d - b - a)/2 \\ m\beta &= (b + d - c - a)/2 \\ m\gamma &= (b + c - d - a)/2. \end{aligned}$$

Ezekből

$$\begin{aligned} 2m^2 &= 2m^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &= \big((c + d - b - a)^2 + (b + d - c - a)^2 + (b + c - d - a)^2\big)/2, \end{aligned}$$

ahonnan a tetraéder élhossza

$$\begin{aligned} e = \sqrt{2}m &= \sqrt{\big((c + d - b - a)^2 + (b + d - c - a)^2 + (b + c - d - a)^2\big)/2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (ab + bc + ca + ad + bd + cd)}\,. \end{aligned}$$

Második megoldás: Legyenek először OP, OQ és OR páronként merőleges egységnyi hosszúságú szakaszok a térben. Állítjuk, hogy ha ezeket a szakaszokat a térben fekvő tetszőleges egyenesre merőlegesen vetítjük, akkor a vetületek hosszának négyzetösszege 1 lesz.

Feltehető, hogy a szóban forgó egyenes áthalad az O ponton. Vegyünk fel rajta egy X pontot O-tól egységnyi távolságra, és vetítsük X-et az OP, OQ, OR egyenesekre. Miután egységnyi szakasz vetületének a hossza csak a két egyenes által bezárt szögtől függ, az OX szakasz három vetületének a hossza rendre egyenlő az OP, OQ, OR szakaszoknak az OX-re eső vetületei hosszával. Ezért a szóban forgó négyzetösszeg egyenlő az X pont koordinátáinak a négyzetösszegével az OP, OQ, OR által kifeszített koordinátarendszerben, azaz 1-gyel.

A fentiekből következik, hogy egy egységnyi élű kocka összes élét a tér bármely egyenesére merőlegesen vetítve az élek vetületeinek a négyzetösszege az egyenes helyzetétől függetlenül mindig 4 lesz – és így x élhosszú kocka esetében $4x^2$ –, hiszen az élek rendszerét négy darab, páronként merőleges élekből álló élhármas egyesítéseként kapjuk.

Rátérünk a feladat megoldására. Az adott tetraéderrel együtt vetítsük a köré írható kocka éleit is a megadott egyenesre. A tetraéder élei ennek a kockának lapátlói, mégpedig mindegyik lapon az egyik.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a parallelogrammáknak az a jól ismert tulajdonsága, mely szerint az oldalak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, érvényes elfajuló parallelogrammákra is, tehát alkalmazható a kocka lapjainak az egyenesre eső vetületeire. Ha ezeket az egyenlőségeket felírjuk a kocka mindegyik lapjának vetületére és összeadjuk őket, akkor egyrészt megkapjuk a kocka összes élei vetületei négyzetösszegének a kétszeresét (mert mindegyik él két laphoz tartozik), másrészt a tetraéder élei vetületei négyzetösszegének a kétszeresét (mert a kocka bármelyik két párhuzamos lapátlója közül pontosan az egyik tartozik a tetraéderhez).

Tehát a tetraéder élei vetületeinek a négyzetösszege egyenlő a köré írt kocka élei vetületeinek a négyzetösszegével.

Jelölje e a tetraéder élhosszát, ekkor a köré írt kocka élhossza $e/\sqrt{2}$. A szóban forgó négyzetösszeg az előzetes megjegyzésünk szerint a kocka élhossza négyzetének a négyszerese, vagyis $4(e/\sqrt{2})^2 = 2e^2$. Ebből a

$$2e^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-d)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

egyenletet kapjuk, ahonnan

$$e = \sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) - (ab+bc+ca+ad+bd+cd)}\,.$$

3. feladat.

Egy nap egy méhraj egy különlegesen szép fa virágjairól gyűjtötte a mézet. Minden méhecske legfeljebb 100-szor látogatott el a fához, kettőnél többen sohasem voltak egyszerre ott, de bármelyik két méhecske találkozott valamikor egymással a fánál. Maximálisan hány méhecskéből állhatott a méhraj?

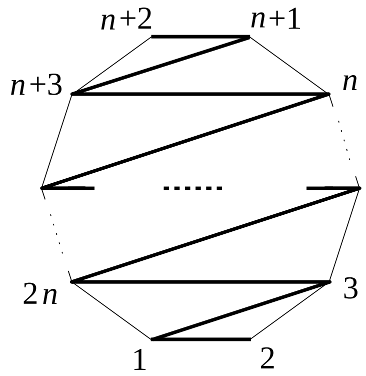
Megoldás: Megmutatjuk, hogy a keresett maximum 200, és általában 100 helyett n látogatás esetén $2n$.

1. Először azt igazoljuk, hogy a $2n$ megvalósulhat, és erre két bizonyítást is adunk.

Az első bizonyításhoz tekintsünk egy szabályos $2n$-szöget, a csúcsait számozzuk meg 1-től $2n$-ig. A sokszög oldalai és átlói (a továbbiakban hívjuk ezeket közös névvel szakaszoknak) éppen megfelelnek az $1,\dots,2n$ számokból képezett (rendezetlen) számpároknak. Mindegyik szakasz vagy egy (szemközti oldalakból álló) oldalpárral párhuzamos, vagy pedig olyan „legrövidebb” átlópárral, amelyek másodszomszédos csúcsokat kötnek össze (a párhuzamosságba most és a továbbiakban az egybeesést is beleértjük). Osszuk a szakaszokat n csoportba a következők szerint: az első csoportba az 12-vel, valamint 13-mal párhuzamos szakaszok kerülnek; a másodikba a 23-mal és 24-gyel párhuzamosak stb., végül az n-edik csoportba az $n, n+1$-gyel, valamint $n, n+2$-vel párhuzamosak. Így minden szakasz pontosan egy csoportba tartozik, és minden csoportban pontosan $n+(n-1) = 2n-1$

szakasz van (lásd az ábrát). Az egy csoportba tartozó szakaszok egy töröttvonal mentén helyezkednek el.

Ezek után a méhek repüljenek a következőképpen. Menjünk végig az első töröttvonal csúcsain. Mind a $2n$ csúcs pontosan egyszer fog előfordulni. A sorozat a 2-es csúccsal kezdődik, aztán így folytatódik: 1, 3, $2n$, 4, $2n-1$, 5, ..., végül $n+3$, $n+1$, $n+2$-vel fejeződik be.



Elsőként a 2-es méh repül a fára. Ott megvárja az 1-est, majd elrepül. Az 1-es megvárja a 3-ast, aztán elrepül. A 3-as megvárja a $2n$-est, aztán elrepül stb. A végén az $n+1$-es megvárja az $n+2$-est, és elrepül, majd az $n+2$-es is elrepül.

Ezt mindegyik csoportra megcsinálják. Ekkor minden méh mindegyik másikkal találkozott a fán, és mivel n csoport van, minden méh pontosan n-szer látogatta meg a fát.

A második bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik. $n = 1$-re az állítás nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy n-re igaz, és az $1, 2, \ldots, 2n$ sorszámú méhek röptét megszerveztük úgy, hogy mindegyikük mindegyikkel találkozott, és mindegyikük legfeljebb n-szer járt a fánál. Ezt most úgy folytatjuk a $2n+1$ és $2n+2$ sorszámú méhvel, hogy ezek egymással és a többiekkel is találkozzanak, a régiek már csak egyszer repüljenek a fához, az újak pedig $n+1$-szer. Ezt meg tudjuk valósítani, ha az alábbi sorrendben egy-egy méh odarepül, megvárja a következőt, majd elrepül, és a legvégén az utolsó elrepül: $2n+1$, 1, $2n+2$, 2, $2n+1$, 3, $2n+2$, ..., $2n+1$, $2n-1$, $2n+2$, $2n$, $2n+1$, $2n+2$.

2. Most rátérünk annak igazolására, hogy $2n$-nél több méh nem lehet.

Legyen a méhek száma k. Jegyezzük fel az összes méh összes (fához) érkezési időpontját, legyen ezek száma T. Mivel minden méh legfeljebb n-szer járt a fánál, ezért $T \leq kn$. (Ha két méh valamikor egyszerre érkezett, azt is számoljuk két érkezési időpontnak.)

Másrészt bármely két méh találkozásához hozzárendelhető a találkozásuk kezdete, ami a később érkezőnek az érkezési időpontja (illetve bármelyiké, ha egyszerre érkeztek). Mivel egyidejűleg csak két méhecske lehet a fánál, ezért ezek a találkozáskezdetek mind különbözők, azaz legalább $k(k-1)/2$ találkozáskezdet van. Az érkezési időpontok száma ennél legalább 1-gyel több, hiszen az elsőként érkező méhecske érkezési időpontja nem találkozáskezdet (illetve ha az elején ketten egyszerre érkeztek, akkor a két érkezési időpont csak egyetlen találkozáskezdetet eredményez). Ennek megfelelően $T > k(k-1)/2$.

A T-re adott becsléseket összevetve kapjuk, hogy $k(k-1)/2 < kn$, azaz $k-1 < 2n$, tehát $k \leq 2n$.