Oktatási Hivatal

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2008-2009. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Határozzuk meg azon $k_1, k_2, ..., k_n$ és n pozitív egészeket, amelyekre

$$k_1 + k_2 + ... + k_n = 5n - 4 \quad \text{és} \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ... + \frac{1}{k_n} = 1.$$

Megoldás: Írjuk fel a harmonikus és számtani közepek közötti egyenlőtlenséget a feladatban szereplő $k_1, k_2, ..., k_n$ számokra. Felhasználjuk, hogy összegük és reciprokaiknak összege is adott.

$$\frac{n}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ... + \frac{1}{k_n}} = n \leq \frac{k_1 + k_2 + ... + k_n}{n} = \frac{5n - 4}{n}.$$

Ebből $n^2 \leq 5n - 4$, amiből $1 \leq n \leq 4$ következik. 3 pont

Vizsgáljuk meg a szóba jöhető n értékeket. Az $n = 1$ és $n = 4$ esetben az iménti egyenlőtlenségben $=$ van, azaz minden k_i egyenlő, a megoldások

$$n = k_1 = 1 \quad \text{és} \quad n = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4.$$ 1 pont

Ha $n = 2$, akkor $k_1 + k_2 = 6$, viszont ennek pozitív egész megoldásai esetén a reciprokösszeg: $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ és $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, ezek egyike sem 1.

Az $n = 3$ esetben tegyük fel, hogy $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Mivel a reciprokok összege 1, ezért $1 < k_1$. $k_1 + k_2 + k_3 = 11$ miatt $k_1 < \frac{11}{3}$, azaz k_1 lehetséges érékei a 2 és 3. $k_1 = 3$ esetén a reciprokösszeg $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ mellett csak úgy teljesülhet, ha $k_1 = k_2 = k_3 = 3$, viszont ekkor az összeg nem 11, nem kaptunk megoldást.

$k_1 = 2$ esetén $\dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} = \dfrac{1}{2}$, ebből $k_2k_3 - 2k_2 - 2k_3 = 0$, szorzattá alakítva

$$(k_2 - 2)(k_3 - 2) = 4.$$

A 4 megfelelő felbontásai az $1 \cdot 4$ és $2 \cdot 2$, az első esetben $k_2 = 3$ $k_3 = 6$, a másodikban $k_2 = k_3 = 4$. A $k_1 + k_2 + k_3 = 11$ feltétel miatt csak a 2,3,6 számhármas megfelelő, illetve ezek bármilyen sorrendben. 3 pont

Az utóljára tárgyalt $n = 3$, $k_1 = 2$ esetben is célhoz érünk a $k_1 + k_2 + k_3 = 11$ feltételből adódó lehetséges további számpárok vizsgálatával. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ közül csak egyszer lesz a reciprokösszeg 1.

Összefoglaljuk a három fajta megoldást: az $n = k_1 = 1$, az $n = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$ és az $n = 3$ ahol k_1, k_2, k_3 a 2,3,6 valamilyen sorrendben.

Összesen: 7 pont

2. A szabályos ABC háromszög belső P pontjának az AB, BC és CA oldalakra eső merőleges vetülete legyen rendre C', A' és B' . Jelölje az APC', BPA', CPB' és APB',

BPC', CPA' háromszögekbe írt körök sugarát rendre r_1, r_2, r_3 és r_4, r_5, r_6. Bizonyítsuk be, hogy

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6.$$

Megoldás: Felhasználjuk, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, beírt körének sugara r, akkor $2r = a + b - c$. Az APC', BPA' és CPB' háromszögekbe írt körök sugarainak összege ezek szerint

$$(1) \qquad (AC' + C'P - AP) + (BA' + A'P - BP) + (CB' + B'P - CP).$$

Az APB', BPC' és CPA' háromszögekbe írt körök sugarainak összege pedig

$$(2) \qquad (AB' + B'P - AP) + (BC' + C'P - BP) + (CA' + A'P - CP).$$

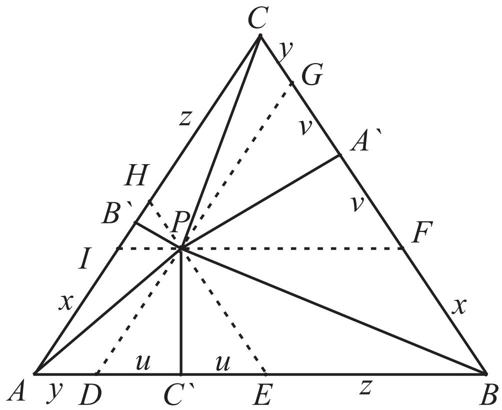
Összevetve (1)-et és (2)-őt a bizonyítandó állítás

$$AC' + BA' + CB' = AB' + BC' + CA'. \qquad \text{4 pont}$$

Húzzunk párhuzamosakat az ABC háromszög oldalaival P-n át. Ezek a háromszög oldalait a D, E, F, G, H, I pontokban metszik az ábra szerint. Ekkor $ABFI$ szimmetrikus trapéz, így $AI = BF = x$, hasonlóan $AD = CG = y$ és $BE = CH = z$. Keletkezett három szabályos háromszög DEP, FGP és HIP, amelyeknek szimmetria tengelye rendre PC', PA' és PB'. Így $DC' = C'E = u$, $FA' = A'G = v$ és $HB' = B'I = w$. Készen is vagyunk, hiszen

$$AC' + BA' + CB' = x + y + z + u + v + w = AB' + BC' + CA'.$$

3 pont



Összesen: 7 pont

3. A $H = \{1; 2; 3; ...; 9\}$ halmaz egy P *partíciójának* nevezzük azt, ha H-t diszjunkt részhalmazainak uniójaként írjuk fel. (A részhalmazok páronként közös elem nélküliek.) Jelölje $P(n)$ az n-t tartalmazó részhalmaz elemeinek számát ($n \in H$). Például a P : $\{1; 4; 5\} \cup \{2\} \cup \{3; 6; 7; 8; 9\} = H$ partíció esetén $P(6) = 5$.

Bizonyítsuk be, hogy H bármely P_1 és P_2 partíciójára található két különböző H-beli n és m elem, amelyekre $P_1(n) = P_1(m)$ és $P_2(n) = P_2(m)$.

Megoldás: Egy partícióban a részhalmazok között szerepelhet az üres halmaz is, de ennek a feladat szempontjából nincs jelentősége, ezért a továbbiakban a partíciókban levő nem üres részhalmazokat figyeljük. Nézzük meg egy tetszőlegesen választott P_1 és P_2 partíció esetén, mit is mond a feladat:

$$P_1 : \{1;4;5\} \cup \{2\} \cup \{3;6;7;8;9\} = H \quad \text{és} \quad P_2 : \{1\} \cup \{2;6;9\} \cup \{3\}\{4\} \cup \{5;7\} \cup \{8\} = H.$$

Felírjuk minden $j \in H$ elem esetén a hozzá tartozó $(P_1(j); P_2(j))$ számpárt:

$$(1) \qquad \begin{array}{cccccccccc} j: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ (P_1(j); P_2(j)): & (1;1) & (1;3) & (5;1) & (3;1) & (3;3) & (5;3) & (5;3) & (5;1) & (5;3) \end{array}$$

Látjuk, hogy az $n = 6$ és $m = 7$ esetén $P_1(n) = P_1(m)$ és $P_2(n) = P_2(m)$.

Egy adott partícióban legfeljebb három különböző méretű részhalmaz lehet, mert már a négy legkisebb különböző méret esetén is $1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9$. 1 pont

Tetszőlegesen választott P_1 és P_2 partíció esetén (1) mintájára tekintsük a $(P_1(j); P_2(j))$ számpárokat. Mivel $P_1(j)$ csak három féle lehet, ezért a számpárokban szereplő első szám helyén legfeljebb három különböző szám szerepelhet. Fenti példánkban az 1, 3 és 5. Ugyanígy a számpárok második, $P_2(j)$ száma is legfeljebb három féle lehet, a fenti példánkban 1, 2 és 3.

Tegyük fel indirekt, hogy a bizonyítandó állítás nem igaz. Ekkor a $j \in H$-hoz tartozó $(P_1(j); P_2(j))$ számpárok csak úgy lehetnek mind különbözőek, ha $P_1(j)$ és $P_2(j)$ is valóban felvesz három különböző értéket ($j = 1, 2, ..., 9$), és ezek minden variációja pont egyszer fordul elő. 3 pont

Nézzük meg, mely k esetén lehet, hogy $P_1(j) = k$ éppen három különböző j-nél szerepel. Ha a k elemű halmazok száma l a P_1 partícióban, akkor a k szám éppen $k \cdot l$-szer szerepel. $k \cdot l = 3$ csak úgy lehet, ha $k = 1$ és három darab egy elemű halmaz van a P_1 partícióban, vagy $k = 3$ és pont egy darab háromelemű halmaz van.

Az indirekt feltevésből az következett, hogy a $P_1(j) = k$ számokat tekintve k értéke háromféle és minden érték éppen három j-nél szerepel. Ez utóbbi viszont csak két k-ra teljesülhet, azaz ellentmondásra jutottunk. 3 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A feladat állítása $|H| = 8$ és $|H| = 10$ esetén nem igaz. Megadunk mindkét esetben két olyan partíciót, ahol különböző j számokhoz különböző $(P_1(j); P_2(j))$ számpár tartozik.

$|H| = 8$:

$$P_1 = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4;5\} \cup \{6;7;8\} \quad \text{és} \quad P_2 = \{1\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{2;7\} \cup \{3;5;8\},$$

illetve $|H| = 10$-re:

$$P_1 = \{1\} \cup \{2;3\} \cup \{4;5;6\} \cup \{7;8;9;10\} \quad \text{és} \quad P_2 = \{7\} \cup \{4;8\} \cup \{2;5;9\} \cup \{1;3;6;10\}.$$