Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2008/2009

Matematika I. kategória

A 3. (döntő) forduló feladatai

1. Egy háromszög oldalai a következők:

$$AB=\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}\right),$$

$$BC=x^{n+1}+x^n+x^{n-1}$$

és

$$CA=x^n+x^{n-1}+x^{n-2},$$

ahol $x>1$ valós szám és $n\in N^+$, $n\geq 2$.

a) Bizonyítsa be, hogy a háromszög derékszögű!

b) Határozza meg az x valós szám értékét úgy, hogy a háromszög legkisebb szögének nagysága 30° legyen!

2. Legyen tetszőleges x valós szám esetén

$$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}!$$

a) Határozza meg az

$$f(x)+f(y)$$

összeget, ha x és y olyan valós számok, amelyek összege 1!

b) Határozza meg az

$$f\left(\frac{1}{2010}\right)+f\left(\frac{2}{2010}\right)+f\left(\frac{3}{2010}\right)+\ldots+f\left(\frac{2009}{2010}\right)$$

összeg pontos értékét!

3. Adja meg az összes olyan háromszöget, amelynek oldalai közvetlen egymás után következő páros egész számok, valamint az egyik belső szöge kétszer akkora, mint ennek a háromszögnek egy másik belső szöge!

Minden feladat hibátlan megoldásáért 10 pont adható.
Az elérhető maximális pontszám 30 pont.

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2008/2009
Matematika I. kategória
A 3. (döntő) forduló feladatainak megoldása

1. Egy háromszög oldalai a következők:

$$AB = \sqrt{x^2-1}\cdot\left(x^n + x^{n-1} + x^{n-2}\right),$$

$$BC = x^{n+1} + x^n + x^{n-1}$$

és

$$CA = x^n + x^{n-1} + x^{n-2},$$

ahol $x > 1$ valós szám és $n \in N^+$, $n \geq 2$.

a) Bizonyítsa be, hogy a háromszög derékszögű!

b) Határozza meg az x valós szám értékét úgy, hogy a háromszög legkisebb szögének nagysága $30°$ legyen!

10 pont

Megoldás:

a)

Mivel $x > 1$, ezért $x^2 - 1 > 0$, azaz $\sqrt{x^2-1}$ értelmezett, továbbá ez pozitív a négyzetgyök definíciója miatt.

Másrészt, mivel $x > 1$ valós szám, ezért x tetszőleges egész kitevőjű hatványa, valamint az ilyen hatványok összege is pozitív, tehát az AB, BC és CA szakaszokra vonatkozó

$$AB = \sqrt{x^2-1}\cdot\left(x^n + x^{n-1} + x^{n-2}\right),\ BC = x^{n+1} + x^n + x^{n-1} \text{ és } CA = x^n + x^{n-1} + x^{n-2}$$

kifejezések mindegyike pozitív valós számot jelent. (1 pont)

A feltételekből adódik, hogy

(1) $$AB = \sqrt{x^2-1}\cdot CA.$$

A BC és CA szakaszok hosszára megadott kifejezéseket átalakítjuk:

(2) $$BC = x^{n-1}\cdot\left(x^2 + x + 1\right),$$

és

(3) $$CA = x^{n-2}\cdot\left(x^2 + x + 1\right).$$

(2) és (3) összevetéséből

(4) $$BC = x \cdot CA\,.$$ (1 pont)

Az $x > 1$ feltétel és (4) miatt

$$BC > CA\,.$$

Az ABC háromszögben kiszámítjuk $AB^2 + CA^2$-et.

Ez (1)-et figyelembe véve:

$$AB^2 + CA^2 = \left(x^2 - 1\right) \cdot CA^2 + CA^2\,,$$

$$AB^2 + CA^2 = x^2 \cdot CA^2\,,$$

ez pedig (4) szerint azt jelenti, hogy:

(5) $$AB^2 + CA^2 = BC^2\,.$$ (2 pont)

A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt tehát az ABC háromszögben

$$BAC\angle = 90°\,,$$

azaz a háromszög valóban derékszögű, amelynek átfogója

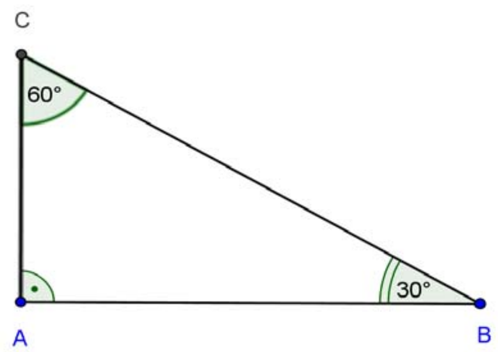
$$BC = x^{n-1} \cdot \left(x^2 + x + 1\right).$$ (1*pont)

b)

Tudjuk, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 30^0, akkor a másik hegyesszög $60°$, és azokban a derékszögű háromszögekben, amelyekben a hegyesszögek nagysága $30°$ és $60°$, az átfogó hosszúsága éppen kétszer akkora, mint a rövidebbik befogó hosszúsága.

Mivel (5) szerint a BC szakasz az ABC háromszög leghosszabb oldala, ezért a $30°$-os szöggel szemben levő oldal csak CA vagy AB lehet.

Ha a CA-val van szemben a $30°$-os szög (1. ábra),

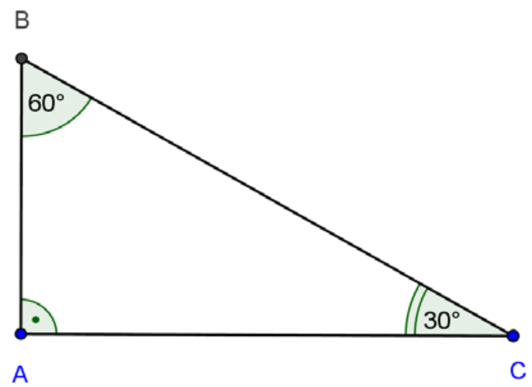


1. ábra

akkor a BC szakasz hossza a CA hosszának kétszerese, ez (4) alapján azt jelenti, hogy

(6) $$x = 2.$$ (2 pont)

Ha az AB oldallal szemben van a $30°$-os szög (2. ábra),



2. ábra

akkor a BC szakasz hossza az AB szakasz hosszának kétszerese, ezért

$$BC = 2 \cdot AB.$$

(1) és (4) figyelembevételével

$$x \cdot CA = 2\sqrt{x^2 - 1} \cdot CA \quad ,$$

amiből a pozitív CA-val való osztás és négyzetre emelés után

(7) $$x^2 = 4(x^2 - 1)$$

következik.

A (7) egyenletnek egyetlen pozitív valós szám megoldása van, mégpedig

(8) $$x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

Ez megfelel a feladat feltételeinek, mert 1-nél nagyobb pozitív valós szám. (2 pont)

A feladatnak tehát két 1-nél nagyobb pozitív valós szám megoldása van,

mégpedig az $x = 2$ és az $x = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$. <u>(1 pont)</u>

Összesen: 10 pont

<u>Megjegyzés:</u>

Ha a versenyző a Pitagorasz-tételre hivatkozik, a tétel megfordítása helyett, akkor az (1*) pontot nem kaphatja meg

2. Legyen tetszőleges x valós szám esetén

$$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}\,!$$

a) Határozza meg az

$$f(x)+f(y)$$

összeget, ha x és y olyan valós számok, amelyek összege 1!

b) Határozza meg az

$$f\left(\frac{1}{2010}\right)+f\left(\frac{2}{2010}\right)+f\left(\frac{3}{2010}\right)+\ldots+f\left(\frac{2009}{2010}\right)$$

összeg pontos értékét!

10 pont

<u>Megoldás:</u>

a)

Az $f(x)$-re adott $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ feltétel felhasználásával:

(1) $$f(x)+f(y)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^y}{4^y+2}.$$

$$f(x)+f(y)=\frac{2\cdot 4^{x+y}+2(4^x+4^y)}{4^{x+y}+2\left(4^x+4^y\right)+4}.$$

Figyelembe véve az $x+y=1$ feltételt

(2) $$f(x)+f(y)=\frac{2\cdot 4\ \ +2(4^x+4^y)}{4\ \ +2\left(4^x+4^y\right)+4}.$$ (2 pont)

A (2)-beli tört értéke pedig 1, mert számlálója és nevezője két egyenlő pozitív valós szám, ezért ha $x+y=1$, akkor

$$f(x)+f(y)=1.$$ (1 pont)

b)

A feladat második részének megoldása során észrevehetjük, hogy egyrészt az összeg páratlan számú tagból áll, ezért van középső tagja, ez pedig az $f\left(\frac{1005}{2010}\right)$, és mivel $2010 = 2 \cdot 1005$, ezért

(3) $$f\left(\frac{1005}{2010}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$ (1 pont)

Másrészt

$$\frac{1}{2010}+\frac{2009}{2010}=1,\ \frac{2}{2010}+\frac{2008}{2010}=1,\ldots,\ \frac{1004}{2010}+\frac{1006}{2010}=1,$$

így a meghatározandó

$$f\left(\frac{1}{2010}\right)+f\left(\frac{2}{2010}\right)+f\left(\frac{3}{2010}\right)+\ldots+f\left(\frac{2009}{2010}\right)$$

összegben szereplő függvény változói ($\frac{1005}{2010}$ kivételével) pontosan 1004 darab olyan párba rendezhetők, amely párok mindegyikének összege 1. (3 pont)

A feladat a) részének eredménye szerint ekkor ezen párok függvényértékeinek összege is 1.

Ebből következik, hogy:

$$f\left(\frac{1}{2010}\right)+f\left(\frac{2}{2010}\right)+f\left(\frac{3}{2010}\right)+\ldots+f\left(\frac{2009}{2010}\right)=1004+f\left(\frac{1005}{2010}\right)$$ (1 pont)

Mivel (3) miatt

$$f\left(\frac{1005}{2010}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

és

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2},$$ (1 pont)

ezért a keresett összeg:

$$f\left(\frac{1}{2010}\right)+f\left(\frac{2}{2010}\right)+f\left(\frac{3}{2010}\right)+\ldots+f\left(\frac{2009}{2010}\right)=1004+\frac{1}{2}=\frac{2009}{2}.$$ <u>(1 pont)</u>

Összesen 10 pont

3. Adja meg az összes olyan háromszöget, amelynek oldalai közvetlen egymás után következő páros egész számok, valamint az egyik belső szöge kétszer akkora, mint ennek a háromszögnek egy másik belső szöge!

10 pont

1. Megoldás:

Ha létezik a megadott feltételeknek megfelelő háromszög, akkor annak az oldalhosszai egyrészt egy olyan számtani sorozat közvetlen egymás utáni tagjai, amelynek differenciája 2, másrészt az oldalak hosszai páros, pozitív egész számok.

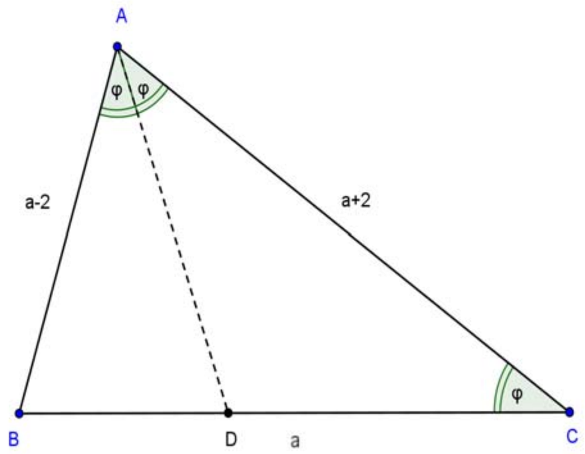
Jelöljük ennek megfelelően az oldalak hosszait az $a-2$, a, és $a+2$ kifejezésekkel, ahol a feltételek miatt $a \geq 4$ páros pozitív egész szám.

Nyilvánvaló, hogy $a-2 < a < a+2$.

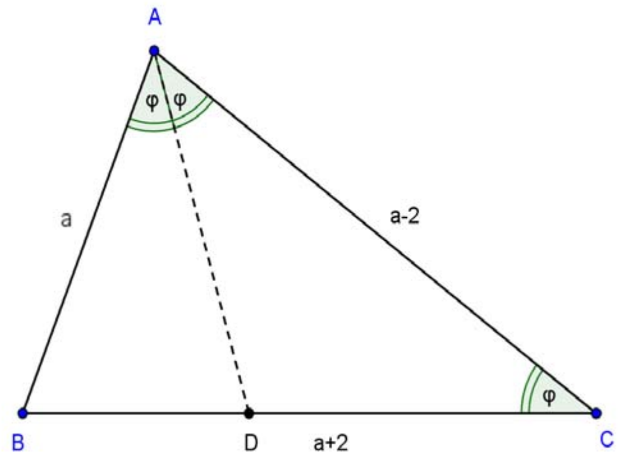
Legyen továbbá φ a háromszög egyik szöge, ekkor a háromszög valamelyik másik szögének a nagysága 2φ. (1 pont)

Mivel minden háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, ezért φ nem lehet az $a+2$ hosszúságú oldallal szemben, továbbá 2φ nem lehet az $a-2$ hosszúságú oldallal szemben.

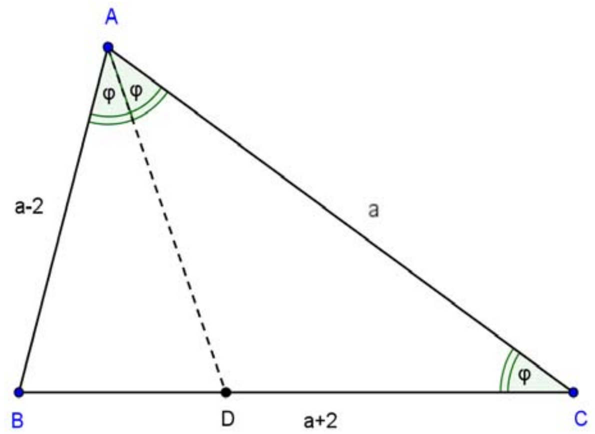
Így a lehetséges elhelyezkedések a következők:



a)

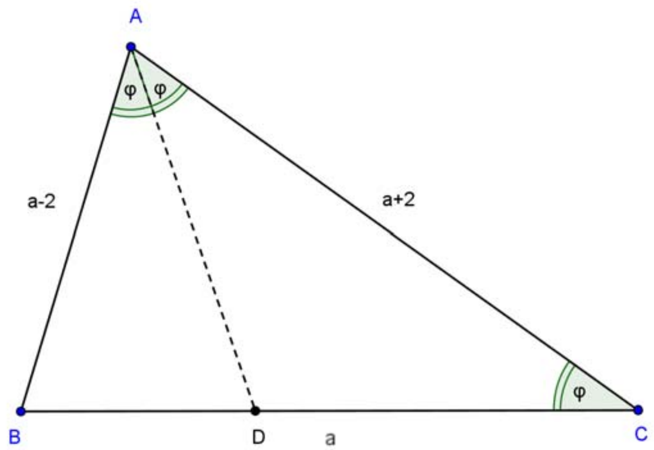


b)



c)

a) Tekintsük az első lehetőséget! (3.ábra)



3. ábra

Az ábra ABC háromszögére felírhatjuk a belső szögfelező tételét, amely szerint:

(1)
$$\frac{CD}{a-CD}=\frac{a+2}{a-2},$$

Az (1) összefüggésből a műveletek elvégzése és rendezés után

$$CD=\frac{a+2}{2}$$

következik. (1 pont)

Másrészt viszont az ábra ACD háromszöge az $ACD\angle = CAD\angle = \varphi$ miatt egyenlő szárú, vagyis

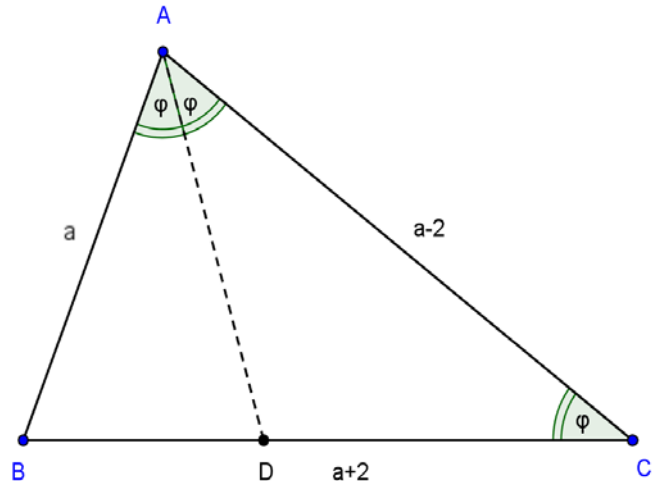
$$CD=AD=\frac{a+2}{2},$$

és ekkor a $CD; AD$ és AC szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, mert

$$CD+AD=AC.$$

Így ez az eset nem állhat fenn. (1 pont)

b) A következő lehetőséget a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra

Ismét felírhatjuk a szögfelezőtételt:

$$\frac{BD}{(a+2)-BD}=\frac{a}{a-2}.$$

Ezt átalakítva:

(2) $$BD=\frac{a\cdot(a+2)}{2\cdot(a-1)}.$$ (1 pont)

A 4. ábra ABC és DBA háromszöge két-két szög egyenlősége miatt hasonló, ezért ezekben a háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{a}{a+2}=\frac{BD}{a},$$

amiből

(3) $$BD=\frac{a^2}{a+2}$$ (1 pont)

(2)-ből és (3)-ból a műveletek elvégzése és egyszerűsítés után az

(4) $$a^2-6a-4=0$$

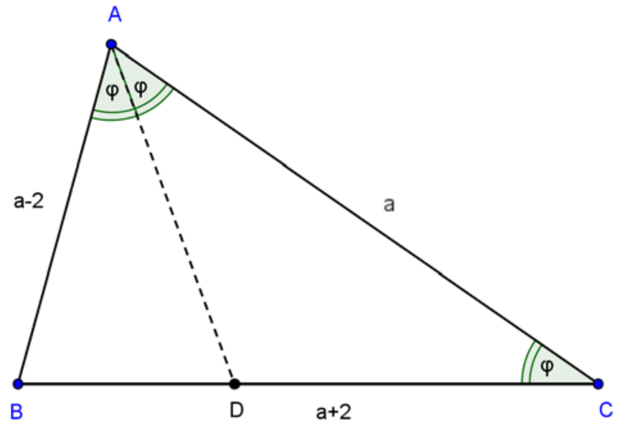
másodfokú egyenletet kapjuk.

Ennek a gyökei az

$$a_1=3+\sqrt{13} \text{ és } a_2=3-\sqrt{13}$$

irracionális számok (továbbá a_2 negatív), tehát ezek nem felelnek meg a feltételeknek. (1 pont)

c) A keresett háromszögre vonatkozó harmadik lehetőséget az 5.ábra mutatja.



5. ábra

Ezúttal is az AD szögfelező által létrehozott BD szakaszra írjuk fel a szögfelező tételét:

$$\frac{BD}{(a+2)-BD}=\frac{a-2}{a}.$$

Ebből a BD szakasz hosszára

(5) $$BD=\frac{(a-2)\cdot(a+2)}{2\cdot(a-1)}$$

adódik. (1 pont)

Az 5. ábra ABC és DBA háromszöge két-két szög egyenlősége miatt hasonló, tehát megfelelő oldalaik aránya egyenlő, vagyis:

$$\frac{a-2}{a+2}=\frac{BD}{a-2}.$$

amiből

(6) $$BD=\frac{(a-2)^2}{a+2}.$$ (1 pont)

(5)-ből és (6)-ból

$$\frac{(a-2)\cdot(a+2)}{2\cdot(a-1)}=\frac{(a-2)^2}{a+2}.$$

Az $a \geq 4$ feltétel miatt $a-2$ pozitív, ezért fenti egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk vele, ahonnan rendezés után az

$$a^2 - 10a = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei

$$a_1 = 0 \qquad \text{és } a_2 = 10.$$

Nyilván $a_1 = 0$ nem felel meg a feladat feltételeinek.

Az $a_2 = 10$ viszont megfelel a feltételeknek. (1 pont)

Számolással ellenőrizhetjük, (például a koszinusztétel alkalmazásával), hogy az $AB = 8$, $AC = 10$ és $BC = 12$ oldalú háromszög BC oldalával szemben levő szög nagysága éppen kétszer akkora, mint az AB oldallal szemben levő.

Eredményünk szerint (az egymással egybevágó háromszögeket nem tekintve különbözőnek) egyetlen, a feladat minden feltételét kielégítő háromszög van, mégpedig az ABC háromszög, melynek oldalhosszúságai a következők:

$$AB = 8,\ AC = 10 \text{ és } BC = 12.$$

(1 pont)

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Az 1. megoldásban tárgyalt feltételek vizsgálata: (1 pont)

Az 1. megoldás három lehetséges esetét elemezzük.

a)

A 3. ábra jelöléseit használjuk.

Az ABC háromszög területének kétféleképpen történő felírásából

$\frac{a\cdot(a+2)\cdot\sin\varphi}{2}=\frac{(a-2)\cdot(a+2)\cdot\sin 2\varphi}{2}$, illetve a $\sin 2\varphi=2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$

trigonometrikus azonosság alkalmazása után

$$\frac{a\cdot(a+2)\cdot\sin\varphi}{2}=\frac{(a-2)\cdot(a+2)\cdot 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{2}$$

következik.

Mivel φ a háromszög egyik szöge, ezért $\sin\varphi$ pozitív szám, az $a+2$ pedig a feltételek miatt pozitív, így mindkét tényezővel oszthatunk.

A műveletek elvégzése és rendezés után (felhasználva, hogy a feltételek miatt $a-2$ ugyancsak pozitív szám) azt kapjuk, hogy

(1) $$\cos\varphi=\frac{a}{2\cdot(a-2)}.$$

Ugyanakkor az ABC háromszög $AB=a-2$ oldalára felírt koszinusztételből a műveletek elvégzése és egyszerűsítés után

(2) $$\cos\varphi=\frac{a+8}{2\cdot(a+2)}$$

adódik.

(1) és (2) egyenlőségéből egyszerű számolással kapjuk, hogy $a=4$.

Ez nem megoldása a feladatnak, mert ekkor az $AB=2$, $BC=4$ és $CA=6$ hosszúságú szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. (2 pont) b)

A 4. ábra jelöléseivel ismét kétféleképpen írjuk fel a háromszög területét:

$$\frac{(a-2)\cdot(a+2)\cdot\sin\varphi}{2}=\frac{a\cdot(a-2)\cdot\sin 2\varphi}{2}.$$

Innen a trigonometrikus azonosság alkalmazása és egyszerűsítés, illetve rendezés után

(3) $$\cos\varphi=\frac{a+2}{2a},$$

az $AB=a$ oldalra felírt koszinusztételből pedig

(4) $$\cos\varphi=\frac{a^2+8}{2\cdot(a+2)\cdot(a-2)}$$

következik.

(3) és (4) megfelelő oldalainak egyenlőségéből a műveletek elvégzésével

az $a^2-6a-4=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei

$$a_1=3+\sqrt{13} \text{ és } a_2=3-\sqrt{13}.$$

Ezek irracionális számok, valamint $a_2=3-\sqrt{13}$ negatív, vagyis ezek nem lehetnek a feladat megoldásai. (3 pont) c)

Az 5. ábra jelöléseivel kétféle módon felírt terület egyenlőségéből előbb

$$\frac{a\cdot(a+2)\cdot\sin\varphi}{2}=\frac{a\cdot(a-2)\cdot\sin 2\varphi}{2},$$

majd a trigonometrikus azonosság alkalmazása és egyszerűsítés után

5) $$\cos\varphi=\frac{a+2}{2\cdot(a-2)}$$

adódik.

Az $AB=a-2$ oldalra felírt koszinusztétel szerint pedig

(a műveletek elvégzése és egyszerűsítés után)

6) $$\cos\varphi=\frac{a+8}{2\cdot(a+2)}.$$

Mivel 5) és 6) jobb oldalai a fentiek szerint egyenlők, ezért az

$\frac{a+8}{2\cdot(a+2)}=\frac{a+2}{2\cdot(a-2)}$ egyenletet megoldva az $a=10$ értéket kapjuk.

Az $a=10$ megfelel a feladat minden feltételének, továbbá nyilvánvaló, hogy az $AB=8$, $AC=10$ és $BC=12$ hosszúságú szakaszokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, és számolással ellenőrizhető, hogy a fenti oldalhosszúságokkal rendelkező ABC háromszög BC oldalával szemben levő szög nagysága éppen kétszer akkora, mint az AB oldallal szemben levő.

(3 pont)

Ezek szerint az egybevágóság erejéig egyetlen olyan háromszög létezik, amely a feladat minden feltételének eleget tesz, ez pedig az $AB=8$, $AC=10$ és $BC=12$ oldalú ABC háromszög. (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzések

Az 1. illetve 2. megoldás eseteinek elemzése az alábbi módon is történhet:

a 3.-4.-5. ábrák mindegyikében felírható a koszinusztétel az AB és BC oldalakra, ezekből $\cos\varphi = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC}$, valamint $\cos 2\varphi = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$ következik.

Ezután pedig alkalmazható a $\cos 2\varphi = 2 \cdot \cos^2 \varphi - 1$ trigonometrikus azonosság. Ebből az egyes esetekben különböző egyenleteket kaphatunk.

a) $$a^3 - 4a^2 - 16a + 64 = 0.$$

A fenti egyenlet bal oldala könnyen szorzattá alakítható, eszerint $(a-4)\cdot(a^2-16)=0$, ebből pedig azt kapjuk, hogy az $a_1 = -4$ és $a_2 = 4$ gyöke az egyenletnek, az utóbbi kétszeres gyök. Ugyanakkor a feladatnak egyik kapott érték sem megoldása, mert $a_1 = -4$ negatív szám, az $a_2 = 4$ mellett pedig az $AB; BC$ és CA szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

b) $$a^4 - 3a^3 - 26a^2 + 12a + 16 = 0.$$

Ennek az egyenletnek könnyen látható, hogy az $a_1 = -4$ és $a_2 = 1$ megoldása, ebből például polinomosztással kaphatjuk az $a^2 - 6a - 4 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az $a_1 = 3 + \sqrt{13}$ és $a_2 = 3 - \sqrt{13}$ irracionális számok. A feltételek miatt egyik kapott gyök sem megoldása a feladatnak.

c) $$a^3 - 7a^2 - 34a + 40 = 0$$

Az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható, így $(a-1)\cdot(a^2-6a-40)=0$, innen pedig kiszámíthatók az egyenlet gyökei: $a_1 = 1$, $a_2 = -4$ és $a_3 = 10$. Ezek közül csak az $a_3 = 10$ gyök szolgáltatja a feladat megoldását jelentő $AB = 8$, $AC = 10$ és $BC = 12$ értékeket, mert a másik két gyök nem felel meg a feltételeknek.

Az a versenyző, aki a bevezető részben szereplő feltételek (az első 1 pont) elemzésével együtt az egyes esetek vizsgálatát a megjegyzésekben foglaltaknak megfelelően (helyesen) hajtja végre, természetesen teljes pontszámot kap.