Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2007–2008-as tanév

MATEMATIKA, III. kategória

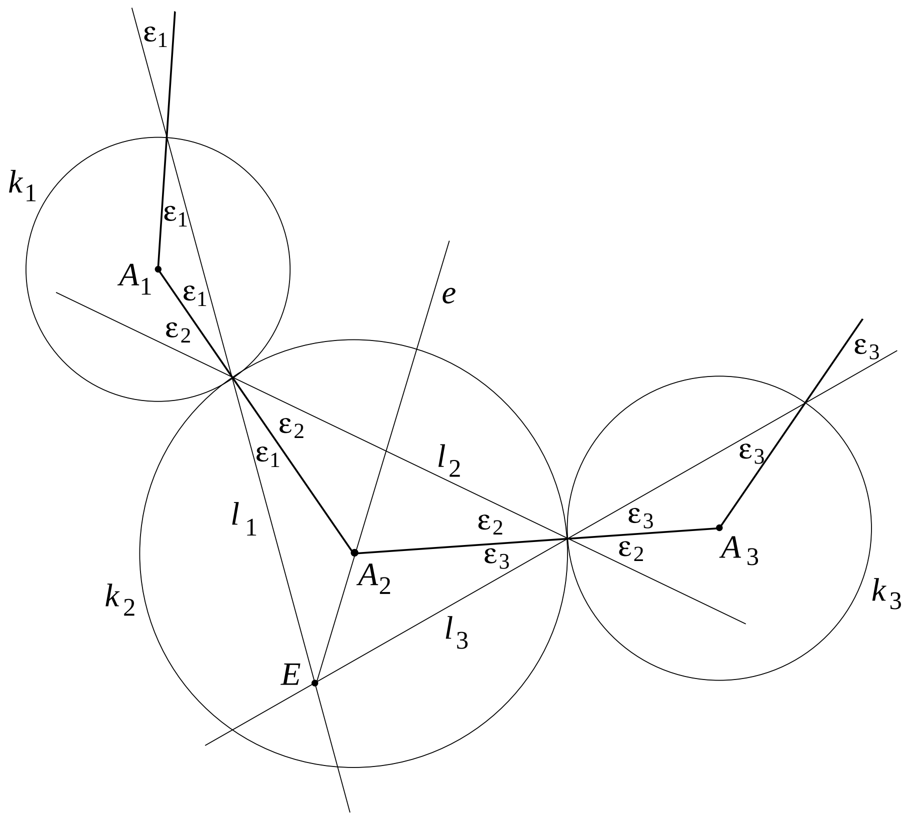
a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

A döntő feladatainak megoldásai

1. feladat.

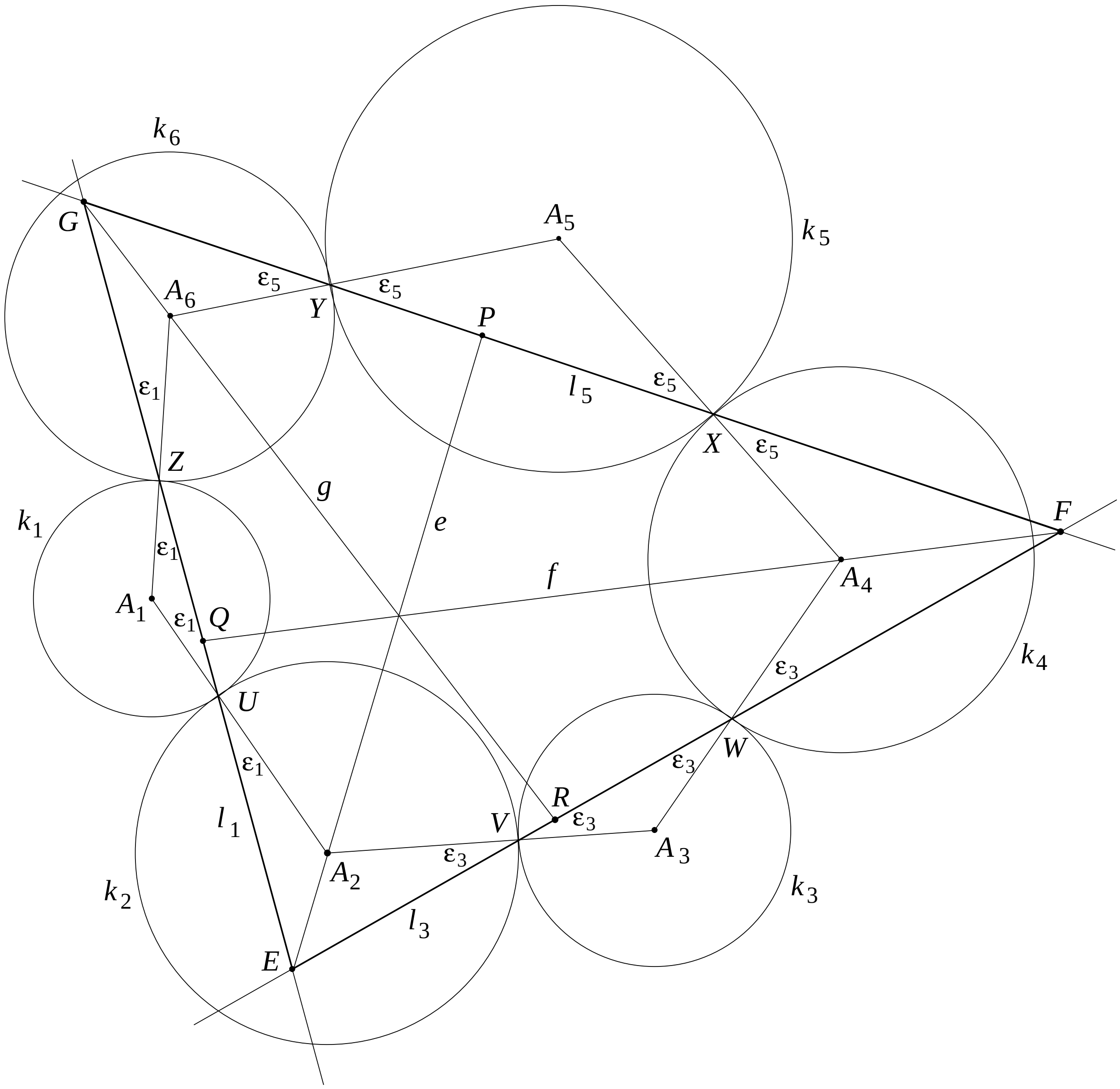
Az $A_1A_2\dots A_6$ konvex hatszög mindegyik belső szöge tompaszög. Az A_i középpontú k_i körök ($1 \le i \le 6$) úgy helyezkednek el, hogy k_1 kívülről érinti k_2-t és k_6-ot, k_2 kívülről érinti k_1-et és k_3-at, általában k_i kívülről érinti k_{i-1}-et és k_{i+1}-et. A k_1-en található két érintési pontot összekötő egyenesnek és a k_3-on található érintési pontokat összekötő egyenesnek a metszéspontját összekötjük A_2-vel, ez lesz az e egyenes. Hasonlóan, a k_3-on, illetve k_5-ön levő érintési pontokat összekötő egyenesek metszéspontját összekötjük A_4-gyel, ez lesz az f egyenes. Végül, a k_5-ön, illetve k_1-en található érintési pontokat összekötő egyenesek metszéspontját összekötjük A_6-tal, ez lesz a g egyenes. Mutassuk meg, hogy e, f és g egy ponton mennek át.

Első megoldás: Jelöljük l_i-vel azt az egyenest, amely a k_i körön levő két érintési pontot köti össze ($i = 1, \dots, 6$). Az $A_1 \dots A_6$ hatszög konvexitása miatt l_i elválasztja A_i-t a többi csúcstól. Ha α_i jelöli a hatszög belső szögét az A_i csúcsnál, akkor az l_i egyenes $\varepsilon_i = (\pi - \alpha_i)/2$ szögben metszi a hatszög két oldalát. Erre a szögre $\alpha_i > \pi/2$ miatt $\varepsilon_i < \pi/4$ teljesül.



Tekintsük az l_1 és az l_3 egyenest. Ezek l_2-vel az $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, illetve $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$ hegyesszögeket zárják be, amelyek l_2-nek az A_2-t tartalmazó félsíkjában egymással szemben állnak. Emiatt

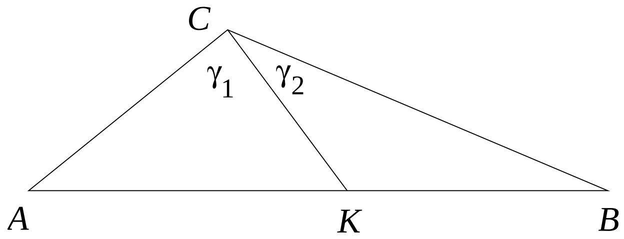
l_1 és l_2 metszik egymást ennek a félsíknak egy E pontjában, és az A_2 pont az l_1, l_2, l_3 által közrefogott háromszögnek belső pontja. Hasonló megállapítások érvényesek az l_3 és l_5 metszéspontjaként keletkező F pontra és A_4-re, valamint az l_5 és l_1 metszéspontjaként adódó G pontra és A_6-ra. Az EFG háromszögnek tehát A_2, A_4 és A_6 belső pontjai.



Azt kell belátnunk, hogy az $e = EA_2$, $f = FA_4$ és $g = GA_6$ egyenesek az EFG háromszögben Ceva-féle egyenesek, azaz egy pontban metszik egymást. Jelölje P, Q és R rendre az e-nek, f-nek, illetve g-nek az EFG háromszög szemközti oldalaival vett metszéspontját. Megmutatjuk, hogy $\dfrac{FP}{PG} \cdot \dfrac{GQ}{QE} \cdot \dfrac{ER}{RF} = 1$, és ebből a Ceva-tétel megfordítására hivatkozva következik majd állításunk.

Először az egyes oldalakon keletkező szakaszok arányát a háromszög oldalaival és a keletkező szögek szinuszaival fejezzük ki.

Segédtétel. *Ha az ABC háromszög AB oldalát egy C-ből induló félegyenes a K pontban metszi, akkor* $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{AC}{BC} \cdot \dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$, *ahol* $\gamma_1 = ACK\sphericalangle$, $\gamma_2 = KCB\sphericalangle$.



Bizonyítás. Az $\dfrac{AK}{KB}$ arány megegyezik az AKC és KBC háromszögek területének arányával, mert ezeknek a háromszögeknek közös a C-ből induló magassága. A két háromszög területét kifejezhetjük két oldalával és a közbezárt szög szinuszával is. Ekkor

$$\frac{AK}{KB} = \frac{2 \cdot T_{AKC}}{2 \cdot T_{KBC}} = \frac{AC \cdot KC \cdot \sin\gamma_1}{KC \cdot BC \cdot \sin\gamma_2} = \frac{AC \cdot \sin\gamma_1}{BC \cdot \sin\gamma_2}\,.$$

A segédtétel bizonyítása után nevezzük el az ábra szerint a k_2 körön levő két érintési pontot U-nak és V-nek, a k_4 körön az érintési pontokat W, X-nek, a k_6 körön az érintési pontokat Y, Z-nek. Egyenlő szárú háromszögek és csúcsszögek alapján több egyenlő szög is van az ábrán:

$$\begin{aligned} EUA_2\sphericalangle &= A_1UZ\sphericalangle = A_1ZU\sphericalangle = GZA_6\sphericalangle = \varepsilon_1\,, \\ FWA_4\sphericalangle &= A_3WV\sphericalangle = A_3VW\sphericalangle = EVA_2\sphericalangle = \varepsilon_3\,, \\ GYA_6\sphericalangle &= A_5YX\sphericalangle = A_5XY\sphericalangle = FXA_4\sphericalangle = \varepsilon_5\,. \end{aligned}$$

Most alkalmazzuk a szinusztételt az EUA_2 és EVA_2 háromszögekre:

$$\frac{\sin(UEA_2\sphericalangle)}{\sin\varepsilon_1} = \frac{UA_2}{EA_2} = \frac{VA_2}{EA_2} = \frac{\sin(VEA_2\sphericalangle)}{\sin\varepsilon_3}\,,$$

innen

$$\frac{\sin(VEA_2\sphericalangle)}{\sin(UEA_2\sphericalangle)} = \frac{\sin\varepsilon_3}{\sin\varepsilon_1}\,.$$

Ugyanilyen úton kapjuk, hogy

$$\frac{\sin(XFA_4\sphericalangle)}{\sin(WFA_4\sphericalangle)} = \frac{\sin\varepsilon_5}{\sin\varepsilon_3} \quad \text{és} \quad \frac{\sin(ZGA_6\sphericalangle)}{\sin(YGA_6\sphericalangle)} = \frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_5}\,.$$

A segédtétel és az eddigi egyenlőségek alapján az EFG háromszög egyes oldalain keletkező szakaszok aránya:

$$\begin{aligned} \frac{FP}{PG} &= \frac{EF \cdot \sin(VEA_2\sphericalangle)}{EG \cdot \sin(UEA_2\sphericalangle)} = \frac{EF}{EG} \cdot \frac{\sin\varepsilon_3}{\sin\varepsilon_1}\,, \\ \frac{GQ}{QE} &= \frac{FG \cdot \sin(XFA_4\sphericalangle)}{EF \cdot \sin(WFA_4\sphericalangle)} = \frac{FG}{EF} \cdot \frac{\sin\varepsilon_5}{\sin\varepsilon_3}\,, \\ \frac{ER}{RF} &= \frac{EG \cdot \sin(ZGA_6\sphericalangle)}{FG \cdot \sin(YGA_6\sphericalangle)} = \frac{EG}{FG} \cdot \frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_5}\,. \end{aligned}$$

Ebből valóban $\dfrac{FP}{PG} \cdot \dfrac{GQ}{QE} \cdot \dfrac{ER}{RF} = 1$ adódik, amit bizonyítani akartunk.

Második megoldás: Használjuk az első megoldásban bevezetett l_1, l_3, l_5, E, F, G jelöléseket. Feküdjön a hat kör a tér valamely S síkjában. Állítsunk a körökre egyenlő nyílásszögű egyenes körkúpokat, amelyek $B_1, \ldots, B_6$ csúcsai közül B_1, B_3 és B_5 az S sík egyik félterében, B_2, B_4 és B_6 a másikban helyezkedjen el. Jelölje S_1 a $B_6B_1B_2$ síkot, S_3 a $B_2B_3B_4$ síkot és S_5 a $B_4B_5B_6$ síkot. Ekkor az l_1, l_3, l_5 egyenesek rendre az S_1, S_3 és S_5 metszésvonalai az S síkkal. Így az E pont illeszkedik S_1 és S_3 metszésvonalára, emiatt ez a metszésvonal az EB_2 egyenes. Hasonlóan, S_3 és S_5 metszésvonala az FB_4 egyenes, S_5 és S_1 metszésvonala a GB_6 egyenes. Ezeknek a metszésvonalaknak az S síkra eső merőleges vetületei rendre az e, f és g egyenesek.

Három sík páronként vett metszésvonalai vagy egy ponton haladnak át (amikor a síkoknak van közös pontja), vagy pedig párhuzamosak (amikor nincs). Ha tehát S_1-nek, S_3-nak és S_5-nek van közös pontja, akkor e, f és g is egy ponton halad át. A másik eset csak oly módon állhatna elő, hogy e, f és g párhuzamosak. Az első megoldás első két bekezdéséhez hasonlóan belátható, hogy a feladat feltételeiből következően ez lehetetlen.

2. feladat.

Két játékos előtt egy-egy kavicskupac található, kezdetben mindkettőben k kavics van. Először az első játékos ezekhez hozzátesz összesen 2008 újabb kavicsot, az új kavicsokat tetszőlegesen oszthatja el a két kupac között (akár az összeset is az egyik kupacba teheti). Ezután a második játékos tesz hozzá a kupacokhoz összesen 2008 újabb kavicsot, és ugyanígy folytatják felváltva. Az nyer, akinek a kupacában (a saját vagy ellenfele lépése után) a kavicsok száma négyzetszám, míg ellenfele kupacára ez nem igaz (ha mindkét kupac ilyen, akkor a játékot folytatják). Van-e végtelen sok k-ra a második játékosnak nyerő stratégiája?

Megoldás: A válasz igenlő, pl. minden elég nagy n esetén $k = n^2 - 2009$-re a második játékosnak van nyerő stratégiája.

Jelölje az első játékost E, a másodikat M, és legyen n olyan nagy, hogy $n^2 - 2010$ és $n^2 + 4014$ között az n^2-en kívül ne legyen négyzetszám (pl. $n \geq 2007$ megfelel, hiszen ekkor $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 4014$, és $n^2 - (n-1)^2 > 4012$).

Tegyük fel, hogy E az első lépésben t kavicsot tesz a saját kupacába és $2008 - t$ kavicsot az M-ébe. Ekkor E kupacában $n^2 - 2009 + t < n^2$, M kupacában $n^2 - 1 - t < n^2$ kavics lesz, tehát a játék biztosan nem ért véget.

Vizsgáljuk először a $t < 2008$ esetet (azaz amikor E az első lépésben nem teszi mind a 2008 kavicsot a saját kupacába). Ekkor M kupacában legalább $n^2 - 2008$ kavics lesz, ezt tehát fel tudja most tölteni n^2-re, miközben E kupacában összesen csak $n^2 - 2$ kavics lesz (hiszen a kavicsok száma összesen $2 \cdot 2008$-cal szaporodott a kezdeti $2(n^2 - 2009)$-hez képest). Így ebben az esetben M máris nyert.

Hátra van a $t = 2008$ eset, ekkor tehát E első lépése után E kupacában $n^2 - 1$, M kupacában pedig $n^2 - 2009$ kavics van. Tegyen most M egyetlen kavicsot a saját kupacába és 2007-et ellenfeléébe. Ekkor E kupacában $n^2 + 2006$, M kupacában $n^2 - 2008$ kavics lesz. Ezek egyike sem négyzetszám, tehát a játék folytatódik. Ha most E mind a 2008 kavicsot M kupacába teszi, akkor M nyert. A többi esetben M kupacában összesen n^2-nél kevesebb, de legalább $n^2 - 2008$ kavics lesz, miközben E kupacában a kavicsok száma legfeljebb $n^2 + 4014$. A játék tehát nem ért véget, és most M n^2-re tudja feltölteni a saját kupacát, miközben E kupacában $n^2 + 4014$ kavics lesz, tehát M nyert.

3. feladat.

Mutassuk meg, hogy minden $1 < r < s < 2008/2007$ számokhoz vannak olyan (nem feltétlenül relatív prím) p és q pozitív egészek, hogy $r < p/q < s$, és sem a p, sem a q tízes számrendszerbeli felírásában nem szerepel a 0 számjegy.

Megoldás: A megoldás lényege a következő. Veszünk $(r + s)/2$-höz nagyon közel egy u/v racionális számot, ahol u és v is 10-val kezdődik. Ezt azonosan átalakítjuk először úgy, hogy sok 0-t írunk mind a számláló, mind a nevező végére, majd balról jobbra haladva egyesével korrigáljuk a számláló és a nevező 0 jegyeit, mégpedig úgy, hogy az éppen vizsgált tört adott számjegyétől kezdődően hozzáadunk (vagy levonunk) a számláló esetében u-t, a nevező esetében v-t. Ily módon az u/v racionális szám egy olyan alakjához jutunk, amelynek számlálójában és nevezőjében az utolsó „néhány" jegytől eltekintve nem fordul elő 0 számjegy. Végül, ezeken az utolsó helyeken tetszőlegesen megváltoztatjuk a 0 jegyeket valami másra. Mivel az így keletkezett tört nagyon közel van u/v-hez, és így $(r + s)/2$-höz is, ezért megfelel a feltételeknek.

Nézzük a részleteket. Írjuk föl az $(r + s)/2$ számot végtelen tizedes tört alakban:

$$1{,}0t_2t_3\ldots\ .$$

Legyen $v = 10^n$, és u az a szám, melynek tízes számrendszerbeli alakja $10t_2t_3 \ldots t_n$, az n értékét majd később választjuk meg. Persze u/v közel van $(r + s)/2$-höz, pontosabban

$$\left|\frac{u}{v} - \frac{r+s}{2}\right| \leq \frac{1}{10^n}\,.$$

A megoldás következő lépéseiben az u/v törtet bővítjük. Először egészítsük ki az u és v számokat 0 számjegyekkel a végükön úgy, hogy mindketten k számjegyből álljanak (tehát a törtet 10 egy hatványával bővítettük), a k értékét is később választjuk meg. Ezt a kiinduló törtet jelölje u_1/v_1.

A következőkben a vizsgált tört számlálójához mindig $10^\ell u$-t, nevezőjéhez $10^\ell v$-t adunk alkalmas ℓ egészre, vagy pedig a számlálóból $10^\ell u$-t, a nevezőből $10^\ell v$-t kivonunk. Ilyen lépések során a tört értéke nem változik, továbbra is u/v marad. Szemléletesen: az éppen vizsgált tört j-edik ($j \leq k-n$) számjegyétől kezdődően hozzáadunk (vagy levonunk) a számláló esetében (egyszer vagy többször) u-t, a nevező esetében v-t. Ezt a lépést röviden úgy hívjuk majd, hogy a számláló és a nevező j-edik jegyét „növeljük", vagy „csökkentjük". Vizsgáljuk meg, hogyan változnak egy-egy ilyen lépésnél a számláló és a nevező számjegyei. Tudjuk, hogy u is és v is 10-val kezdődő $n + 1$ jegyű számok.

Ha a j-edik számjegyet növeljük, akkor ez a számjegy 1-gyel vagy 2-vel nőni fog modulo 10. Ha közben tízes átlépés is keletkezik, akkor persze a j-ediktől balra lévő számjegyek is módosulnak, ez akkor következhet be, ha a j-edik számjegy 8 vagy 9. Érdemes megjegyezni, hogy $m \le 4$ egymás utáni növelő lépés során a j-edik számjegy csak m-mel vagy $m+1$-gyel nőhet (mert u és v második számjegye nulla).

Hasonlóképpen, ha a j-edik számjegyben $m \le 4$-szer csökkentünk, akkor ennek értéke m-mel vagy $m+1$-gyel csökken modulo 10, miközben tízes átlépés is keletkezhet, amikor a j-ediktől balra lévő számjegyek is módosulhatnak.

Jelölje egy adott pillanatban a törtünk számlálóját $a_1 a_2 \dots a_k$, nevezőjét $b_1 b_2 \dots b_k$. Azt mondjuk, hogy ez a tört a $j-1$-edik számjegyig bezárólag már „jó”, ha $a_1, \dots, a_{j-1}$ és $b_1, \dots, b_{j-1}$ egyike sem 0, továbbá a_{j-1} és b_{j-1} egyike sem 9. A kiinduló u_1/v_1 tört az első számjegyig bezárólag jó, hiszen az első számjegyek 1-esek. Ha a törtünk már a $j-1$-edik számjegyig bezárólag jó (ahol $j \le k-n$), akkor hajtsuk végre a következő lépéseket.

Ha a_j és b_j egyike sem 0, sem 9, akkor nem csinálunk semmit. Ha $|a_j - b_j| \le 6$, akkor a j-edik számjegyet tudjuk növelni vagy csökkenteni tízes átlépés nélkül is úgy, hogy ne keletkezzen se nulla, se kilences. Valóban, ha valamelyik nulla volt, akkor a másik legfeljebb 6, és így 1-gyel növelhetünk. Ha valamelyik 9 volt, akkor a másik legalább 3, így 1-gyel csökkenthetünk.

Ha $|a_j - b_j| \ge 7$, akkor növelünk úgy, hogy a nagyobbik számjegy a tízes átlépés után 1 vagy 2 legyen. Ehhez a legrosszabb esetben 4-gyel kell növelnünk (ha az a számjegy 7-es volt). Mivel a kisebbik számjegy legfeljebb 2 lehet, maximum 7-ig nőhet. Közben a tízes átlépés miatt a_{j-1} és b_{j-1} egyikéhez 1-et kell adni, de mivel itt nem volt 9-es a feltevésünk szerint, ezért nem keletkezik nulla, és további tízes átlépés sincs, azaz $j-1$-ediknél korábbi számjegy nem változik. (Az lehet, hogy a $j-1$-edik pozícióban keletkezik egy 9-es, de ez nem baj). Ezért a kapott tört a j-edik számjegyig bezárólag jó.

Ezt az eljárást folytathatjuk addig, amíg a törtünk jó nem lesz az első $k-n$ számjegyig bezárólag. Jelölje a, illetve b a számlálóban, illetve a nevezőben az első $k-n$ számjegyből álló számot. Ekkor a számláló $10^n a + c$, a nevező pedig $10^n b + d$, ahol $0 \le c, d < 10^n$. Persze $(10^n a + c)/(10^n b + d) = u/v$. Változtassuk meg a c és d számok jegyeit tetszőlegesen úgy, hogy a kapott c' és d' számokban már ne szerepeljen a 0 számjegy. Megmutatjuk, hogy $p = 10^n a + c'$ és $q = 10^n b + d'$ kielégíti a feladat feltételeit, vagyis n és k alkalmas választásával a kapott p/q tört r és s közé esik. Ehhez azt kell igazolni, hogy az utolsó n számjegy tetszőleges változtatásával az u/v tört értéke csak „keveset” módosulhat.

Nyilván u/v is és p/q is benne van a

$$\left[\frac{10^n a}{10^n b + (10^n - 1)}, \frac{10^n a + (10^n - 1)}{10^n b}\right]$$

intervallumban, melynek hossza kisebb, mint

$$\frac{10^n (a+1)}{10^n b} - \frac{10^n a}{10^n (b+1)} = \frac{(a+1)(b+1) - ab}{b(b+1)} = \frac{a/(b+1) + 1}{b} .$$

Mivel a és b is $k-n$ jegyű számok, $a/(b+1) \le 10$, ezért az intervallum hossza kisebb, mint $11/10^{k-n-1} \le 1/10^{k-n-3}$. Ezért $k = 2n+3$ választással

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{10^n} .$$

Vagyis

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{r+s}{2}\right| < \frac{2}{10^n}\,.$$

Ha tehát n-et úgy választjuk, hogy $1/10^{n-1}$ már kisebb legyen $s-r$-nél, akkor p/q tényleg r és s közé esik.