A döntő feladatainak megoldása

1. Feladat

Egy kifejezést a következő képlettel definiálunk:

$$K = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 2017}{x^2 - 9},$$

ahol $x \in [-2008;2008]$ **és** $x \in Z$**.**

Mennyi a valószínűsége annak, hogy K egész szám, ha x eleget tesz a fenti feltételeknek?

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy a K kifejezés nem értelmezhető, ha $x^2 - 9 = 0$, ezért

$$x \neq \pm 3.$$ (1 pont)

Alakítsuk át a K kifejezést:

$$K = \frac{x \cdot (x^2 - 9) - (x^2 - 9) + 2008}{x^2 - 9},$$

$$K = x - 1 + \frac{2008}{x^2 - 9}.$$ (2 pont)

K akkor és csak akkor lesz egész szám, ha $\frac{2008}{x^2 - 9}$ egész, ami ekvivalens azzal, hogy az $x^2 - 9$ kifejezés értékei a 2008 szám – pozitív és negatív – osztói. (1 pont)

Mivel 2008 prímtényezős felbontása: $2^3 \cdot 251$, (1 pont)

ezért $x^2 - 9$-nek csak a következő táblázat első oszlopában lévő értékei adhatnak K-ra egész értéket.

A táblázat tartalmazza az ezekből számított x^2, illetve x számokat.

x^2-9	x^2	x
1	10	nem egész szám
-1	8	nem egész szám
2	11	nem egész szám
-2	7	nem egész szám
4	13	nem egész szám
-4	5	nem egész szám
8	17	nem egész szám
-8	1	$x=1$ és $x=-1$
251	260	nem egész szám
-251	-242	nem valós szám
502	511	nem egész szám
-502	-493	nem valós szám
1004	1013	nem egész szám
-1004	-995	nem valós szám
2008	2017	nem egész szám
-2008	-1999	nem valós szám

(2 pont)

A fenti táblázatból látható, hogy csak $x^2-9=-8$ esetben kapunk x-re egész számot. Ez azt jelenti, hogy a feladat szempontjából csak

$$x=+1$$

és

$$x=-1$$

felel meg, tehát a kedvező esetek száma:

$$k=2.$$ (1 pont)

Az összes esetek számát megkapjuk, ha a $[-2008;2008]$ intervallumbeli egészek számából levonjuk az $x\neq+3$ és $x\neq-3$ feltétel miatt kieső két számot. Így az összes esetek száma:

$$n=4015.$$ (1 pont)

A keresett valószínűség tehát:

$$P=\frac{k}{n},$$

$$P=\frac{2}{4015}.$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

2. Feladat

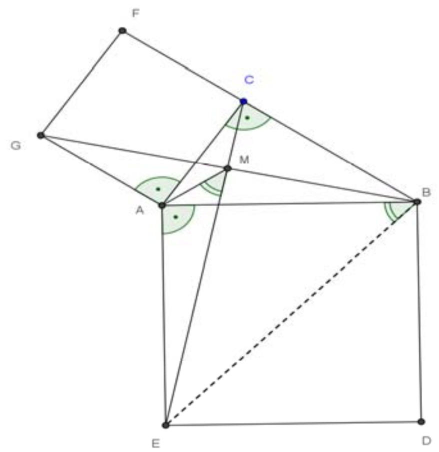
Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójára és az AC befogójára kifelé megrajzoltuk az $ABDE$ és $ACFG$ négyzeteket.

Jelölje M az EC és BG szakaszok metszéspontját!

Mekkora szögben látszanak az M pontból az ABC háromszög oldalai?

Megoldás I. :

Jelöléseink az alábbi ábrán láthatók.



1. ábra

Az AGB háromszög negatív irányú $90°$-os elforgatottja az ACE háromszög. (2 pont)

Ezért a GB és CE szakaszok merőlegesek egymásra, tehát az ABC háromszög BC oldala az M pontból derékszögben látszik. (2 pont)

Mivel GB és CE szakaszok merőlegesek egymásra, ezért az M pont rajta van a BE szakasz, mint átmérő fölé rajzolt Thalész-körön is. (1 pont)

Ebben a körben az $ABE\angle$ olyan kerületi szög, amely az AE ívhez tartozik.

Másrészt

$$ABE\angle = 45^0,$$

mivel az $ABDE$ négyzet oldalának és átlójának szöge. (1 pont)

De ugyanehhez az ívhez tartozik az $AME\angle$ is, ezért a kerületi szögek tétele alapján

$$AME\angle = ABE\angle.$$ (2 pont)

Így az AB átfogó M pontból mért látószöge:

$$AMB\angle = 90^0 + 45^0,$$

$$AMB\angle = 135^0.$$ (1 pont)

A harmadik oldal látószöge:

$$AMC\angle = 360^0 - \left(135^0 + 90^0\right),$$

$$AMC\angle = 135^0.$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A második látószöget a kerületi szögtétel nélkül például az alábbiak szerint kaphatjuk meg.

Megszerkesztjük az M pont (GB-n lévő) $+90^0$-os elforgatottját M'-t.

Az AMM' egyenlőszárú derékszögű háromszögből leolvashatjuk, hogy

$$AMM'\angle = AMG\angle = 45^0,$$

amiből

$$AMC\angle = AMG\angle + GMC\angle,$$

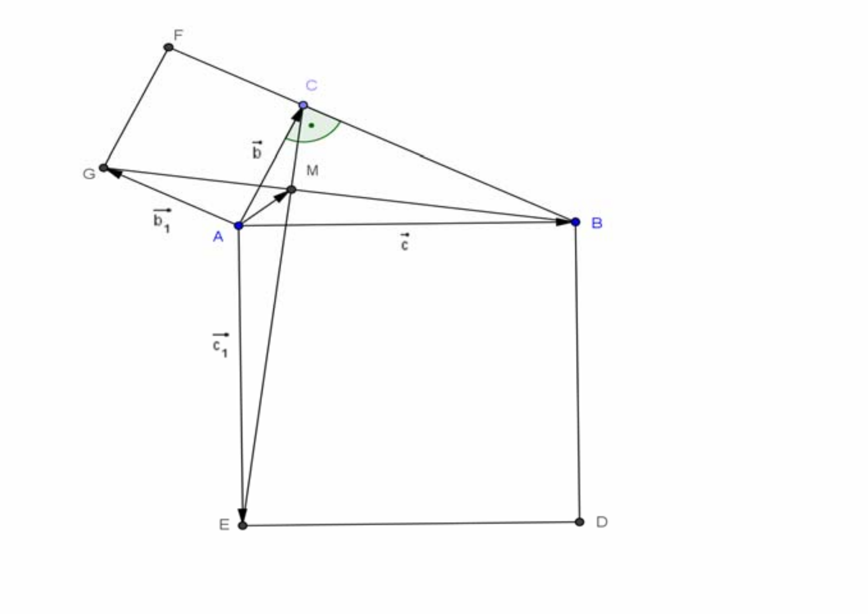
$$AMC\angle = 45^0 + 90^0,$$

$$AMC\angle = 135^0.$$ (5 pont)

Ekkor $AMB\angle$-t számoljuk kivonással. (1 pont)

Megoldás II. :

Ebben a megoldásban a GB és CE szakaszok merőlegességét vektorok segítségével bizonyítjuk.



2. ábra

A feladat feltételei miatt a 2. ábrán megjelölt $\vec{b}$ és $\vec{b_1}$, illetve $\vec{c}$ és $\vec{c_1}$ vektorokra nyilvánvalóan teljesül, hogy

(1) $$\left|\vec{b}\right| = \left|\vec{b_1}\right| = AC = b\text{, illetve } \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{c_1}\right| = AB = c\,.$$

Mivel a $\vec{b}$ és a $\vec{b_1}$, illetve a $\vec{c}$ és a $\vec{c_1}$ vektorok által bezárt szög $90°$-os, ezért a két-két vektor skaláris szorzata nulla, azaz

(2) $$\vec{b}\cdot\vec{b_1} = 0\text{, és } \vec{c}\cdot\vec{c_1} = 0\,.$$ (1 pont)

Az ábra alapján

$$\overrightarrow{GB} = \vec{c} - \vec{b_1}\text{, és } \overrightarrow{CE} = \vec{c_1} - \vec{b}\,.$$

Írjuk fel a $\overrightarrow{GB}$ és $\overrightarrow{CE}$ vektorok skaláris szorzatát:

(3) $$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{CE} = \left(\vec{c} - \vec{b_1}\right)\cdot\left(\vec{c_1} - \vec{b}\right).$$

Tudjuk, hogy a skaláris szorzás disztributív, ezért (3) átalakítva:

(4) $$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{CE} = \vec{c}\cdot\vec{c_1} - \vec{c}\cdot\vec{b} - \vec{b_1}\cdot\vec{c_1} + \vec{b_1}\cdot\vec{b}\,.$$

(2)-t (4)-be helyettesítve:

(5) $$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{CE} = -\vec{c}\cdot\vec{b} - \vec{b_1}\cdot\vec{c_1}$$ (1 pont)

következik.

Mivel a $\vec{c}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt szög a szokásos jelölések mellett

$$BAC\angle = \alpha ,$$

a $\overrightarrow{b_1}$ és $\overrightarrow{c_1}$ vektorok bezárt szöge viszont

$$GAE\angle = 180° - \alpha ,$$

ezért (5)-ből és (1)-ből

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{CE} = -b \cdot c \cdot \cos\alpha - b \cdot c \cdot \cos(180° - \alpha).$$ (1 pont)

Felhasználva, hogy

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha ,$$

kapjuk, hogy

(6) $$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 .$$

A (6) összefüggés akkor és csakis akkor teljesül, ha a $\overrightarrow{GB}$ és $\overrightarrow{CE}$ vektorok merőlegesek egymásra. Ez pontosan azt jelenti, hogy a GB és CE szakaszok merőlegesek egymásra, ezért az ABC háromszög BC befogója az M pontból derékszögben látható. (1 pont)

Innen a feladat az első megoldás menete alapján fejezhető be. (6 pont)

Összesen: 10 pont

3. Feladat

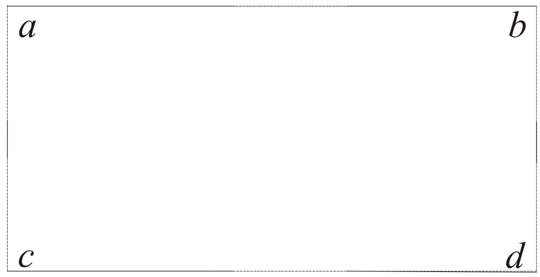
Egy m sorból és n oszlopból álló, téglalap alakú táblázat minden mezőjébe egy-egy számot írunk oly módon, hogy az egyes sorokba írt számok egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjait képezik, hasonlóképpen az egyes oszlopokba írt számok is egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.

Mennyi a táblázatba írt számok összege, ha a téglalap négy sarkába (csúcsába) írt számok összege 2008?

Megoldás:

n oszlop

m sor



3. ábra

Legyen a sarkokba írt négy szám a 3. ábra szerint $a;b;c;d$!

Először soronként összegezzük a számokat.

A feltétel szerint az első sorban levő számok egy számtani sorozat tagjai. Ennek a számtani sorozatnak a különbségét jelöljük d_1-gyel!

Az első sorban levő számok a következők:

$$a; a+d_1; a+2d_1; a+3d_1; ...; a+(n-1)\cdot d_1 = b,$$

összegük:

(1) $$S_1 = a + (a+d_1) + (a+2d_1) + ... + a + (n-1)d_1 .$$

(2) $$S_1 = \frac{a+b}{2} n .$$ (1 pont)

Az egyes oszlopokban szereplő számok is egy-egy számtani sorozat tagjai. Az ezekhez a sorozatokhoz tartozó különbségek legyenek rendre

$$d_2; d_3; d_4; \ldots; d_{n+1}!$$

Ezekkel a jelölésekkel kifejezhetők (balról jobbra haladva) a második sorban levő számok:

$$a + d_2; a + d_1 + d_3; a + 2d_1 + d_4; a + 3d_1 + d_5; \ldots; a + (n-1) \cdot d_1 + d_{n+1},$$

amelyek összege:

(3) $$S_2 = (a + d_2) + (a + d_1 + d_3) + \ldots + [a + (n-1)d_1 + d_{n+1}].$$

Ha (3)-ból kivonjuk (1)-et, akkor azt kapjuk, hogy

(4) $$S_2 - S_1 = d_2 + d_3 + \ldots + d_{n+1}.$$ (2 pont)

Jelöljük ezt S_d-vel!

A harmadik sorban levő számok ugyancsak kifejezhetők a fenti jelölésekkel:

$$a + 2d_2; a + d_1 + 2d_3; a + 2d_1 + 2d_4; a + 3d_1 + 2d_5; \ldots; a + (n-1) \cdot d_1 + 2d_{n+1},$$

ezek összege:

(5) $$S_3 = (a + 2d_2) + (a + d_1 + 2d_3) + \ldots + [a + (n-1)d_1 + 2d_{n+1}].$$

(5) és (3) különbségeként adódik:

$$S_3 - S_2 = d_2 + d_3 + \ldots + d_{n+1},$$

ami (4) miatt

(6) $$S_3 - S_2 = S_d.$$

Bizonyítható, hogy bármelyik sor tagjainak összegéből kivonva a megelőző sor tagjainak összegét, mindig ugyanazt az

$$S_d = d_2 + d_3 + \ldots + d_{n+1}$$

összeget kapjuk, (3* pont)

azaz átrendezve (4), (6)…:

$$S_2 = S_1 + S_d\,,$$

$$S_3 = S_2 + S_d\,,$$

……………..

$$S_m = S_{m-1} + S_d$$

Ezzel beláttuk, hogy az m sorban elhelyezkedő m darab összeg szintén számtani sorozatot alkot. (1 pont)

Ennek első tagja (2) szerint

$$S_1 = \frac{a+b}{2}n\,,$$

m -edik tagja pedig

$$S_m = \frac{(c+d)n}{2}\,. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel a soronkénti összegeket – amik egy számtani sorozat tagjai – kell összegeznünk, ezért

$$S = \frac{S_1 + S_m}{2}m\,,$$

$$S = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\cdot n + \frac{c+d}{2}\cdot n\right)\cdot m}{2}\,,$$

$$S = \frac{m\cdot n\cdot\left(a+b+c+d\right)}{4}\,. \qquad \text{(1 pont)}$$

A feladat feltétele alapján

$$a+b+c+d = 2008\,,$$

ezért

$$S = \frac{m\cdot n\cdot 2008}{4}\,,$$

$$S = 502\cdot m\cdot n\,. \qquad \underline{\text{(1 pont)}}$$

Összesen: 10 pont

Megjegyzés (1):

Természetesen úgy is eljuthatunk a megoldáshoz, hogy a sorok összegzése után oszloponként adjuk össze a számokat, és a két összeg együttesen a táblázatba írt számok összegének a kétszeresét adja.

Megjegyzés (2):

A leírt megoldásban nem használtuk ki, hogy $d_{2,} d_3, ..., d_{n+1}$ számtani sorozatot kell alkosson, ha a feladat szövege szerint minden sorban számtani sorozat van. A versenyző erre is építheti megoldását.

Megjegyzés (3):

Ha a versenyző nem bizonyítja korrektül az

$$S_i - S_{i-1} = S_d$$

összefüggést, akkor a 3* pontból vonjunk le 1 pontot.