Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely

2014. április 7.

A 11-12. osztályosok feladatainak javítókulcsa

1.

Legyen a=7, b=11, c=13, a c oldalhoz tartozó súlyvonalat keressük. Először a koszinusz-tétel segítségével meghatározzuk a b-vel szembeni β szög koszinuszát:

$$\cos\beta = \frac{7^2 + 13^2 - 11^2}{182} = \frac{97}{182} \approx 0{,}5330$$

(2 pont)

Alkalmazzuk most a koszinusz-tételt arra a háromszögre, amelynek oldalai az s súlyvonal, az a oldal és a c oldal fele:

$$s^2 = 7^2 + 6{,}5^2 - 91\cos\beta = 42{,}75, amiből\ s = 6{,}538$$

(2 pont)

Az s súlyvonal és a c oldal δ hajlásszögét a szinusztétel segítségével határozhatjuk meg:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\beta} = \frac{7}{6{,}538}$$

Figyelembe véve, hogy $\sin\beta = \sqrt{1 - (\cos\beta)^2} = 0{,}8461$, kapjuk, hogy

$$\sin\delta = 0{,}9059, amiből\ \delta = 64°56'$$

(2 pont)

2.

Kamatos kamatozást feltételezve, p% kamatláb mellett a duplázódáshoz szükséges évek száma a legkisebb olyan k, amelyre

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^k \geq 2$$

(3 pont)

Az egyenlőtlenség alapján a duplázódáshoz szükséges évek száma a

$$k = \left\lceil \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \right\rceil$$

képlettel határozható meg.

(1 pont)

Így a feladatban megadott p értékekre a „70-es szabály”, illetve a képlettel történő pontos számítás a következő értékeket adja:

p értéke	Évek száma a 70-es szabállyal közelítve	Évek száma a pontos számítás szerint	
		Kerekítés nélkül	Fölső egészrész
1	70	69,66	70
2	35	35,00	35
5	14	14,21	15
10	7	7,27	8
14	5	5,30	6

(3 pont)[1]

3.

Először meghatározzuk az átlók metszéspontját, ezt a

$$7x - 11y + 12 = 0$$

$$x - 13y + 76 = 0$$

egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. A metszéspont koordinátái $\left(\frac{17}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

(2 pont)

A téglalap csúcsainak koordinátáit úgy kaphatjuk meg, hogy megkeressük a téglalap köré írt körnek először az egyik, majd a másik átlóval való metszéspontját.

(2 pont)

Először tehát megoldjuk a

$$7x - 11y + 12 = 0$$

$$\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{85}{2}$$

egyenletrendszert, amiből két csúcs koordinátáit kapjuk: A(3,3) és C(14,10).

(2 pont)

A másik két csúcs koordinátáit a

$$-x + 13y - 76 = 0$$

$$\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{85}{2}$$

[1] Arányosan osztandó attól függően, hogy a versenyző hány sort számolt ki helyesen

egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Ebből a téglalap további két csúcsának koordinátái B(2,6) és D(15,7).

(2 pont)

4.

a) Annak valószínűsége, hogy mindegyik körzetben az A párt jelöltje nyer, $p_0 = 0{,}6^{10} \approx 6{,}047 \times 10^{-3}$.

(2 pont)

b) Hasonlóan, annak valószínűsége, hogy mindegyik körzetben a B párt jelöltje nyer, $p_{10} = 0{,}4^{10} \approx 1{,}049 \times 10^{-4}$.

(2 pont)

c) Általában véve, annak valószínűsége, hogy a B párt jelöltje k darab mandátumot szerez:

$$p_k = \binom{10}{k} 0{,}4^k 0{,}6^{10-k}$$

Indoklás: 10 körzetből k darabot $\binom{10}{k}$ féle módon lehet kiválasztani, annak valószínűsége pedig, hogy meghatározott k körzetet nyer a B párt $q = 0{,}4^k 0{,}6^{10-k}$. A p_k valószínűség a két mennyiség szorzata.

(3 pont)

A fenti képlet alkalmazásával $p_1 \approx 4{,}031 \times 10^{-2}$, $p_2 \approx 0{,}1209$ és $p_3 \approx 0{,}2150$. A keresett valószínűség tehát $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 \approx 0{,}3823$

(3 pont)

5.

Legyenek $a_1, \dots a_k$ a kérdéses számok és képezzük minden $i = 1, \dots k$-ra az $S_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$ összegeket. Legyenek $m_1, \dots m_k$ rendre az $S_1, \dots S_k$ összegek k-val vett osztási maradékai.

Mivel az m_i maradékok a 0,…,k-1 értékek valamelyikét veszik föl, két eset lehetséges:

a) Valamely i-re $m_i = 0$. Ekkor $S_i = a_1 + \cdots + a_i$ osztható k-val

b) Ha mindegyik m_i különbözik 0-tól, akkor a skatulyaelv értelmében lesz közöttük két azonos (hiszen ekkor k darab szám mindegyike az $\{1, \dots, k-1\}$ halmazból kerül ki). Tfh. valamely i<j-re $m_i = m_j$, ez azt jelenti, hogy az S_i és S_j k-val osztva azonos maradékot adnak. Ebből viszont következik, hogy az $S_j - S_i = a_{i+1} + \cdots + a_j$ összeg osztható lesz k-val.

(8 pont)

Megjegyzés: vegyük észre egyrészt, hogy az állítás akkor is igaz, ha $a_1, \dots a_k$ tetszőleges egészek és esetleg azonosak is vannak közöttük, sem a nem-negativitást, sem a különbözőséget nem használtuk ki. Másfelől az is látható, hogy az állítás bizonyos értelemben „éles”: adott k esetén vegyünk k-1 olyan (különböző) egész számot, amelyik k-val osztva 1 maradékot ad. Világos, hogy közülük akárhogy választunk ki néhányat, az összeg semmiképp nem lesz k-val osztható.

6.

Jelöljük $\sqrt{x}$ egészrészét K-val, törtrészét t-vel, azaz: $\sqrt{x} = K + t$ $(K\ egész, t \in [0,1)$. Világos, hogy ekkor

$$x = K^2 + 2Kt + t^2$$

Mivel K egész, nyilván a négyzete is az, ezért $\{x\} = \{2Kt + t^2\}$. A megoldandó egyenlet tehát

$$\{\sqrt{x}\} = t = \sqrt{\{2Kt + t^2\}}$$

(3 pont)

Figyelembe véve, hogy mindkét oldal nem-negatív, az egyenlet az alábbival ekvivalens:

$$t^2 = \{2Kt + t^2\}$$

Nyilvánvaló, hogy a fenti egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha $2Kt$ egész.

(3 pont)

Kapjuk tehát, hogy amennyiben tetszőleges K egészhez úgy választunk 0≤t<1 értéket, hogy $2Kt$ egész legyen, akkor $x = (K+t)^2$ megoldása lesz az egyenletnek. Ez azt jelenti, hogy

a) K=0 esetén tetszőleges $t \in [0,1)$-re $x = t^2$ megoldás (egyszerűbben: az egyenletnek a $[0,1)$ intervallum valamennyi eleme megoldása)
b) K>0 egész szám esetén minden $i = 0,..2K-1$ -re $x = \left(K + \frac{i}{2K}\right)^2$ megoldás[2]

(3 pont)

Feltehetően lesznek versenyzők, akik vagy csak az a) esetet, vagy csak azt az esetet fogják megoldásnak feltüntetni, amikor x négyzetszám. Az ilyen részmegoldásra maximum összesen 3 pontot adunk.

[2] Vegyük észre, hogy a b) feltétel azt az esetet is tartalmazza, amikor x valamely egész szám négyzete