# Németh László Városi Matematika Verseny 2014

## Hódmezővásárhely

9-10. osztály

2014. április 7.

---

1. Falióránk három mutatója közül az egyik az órát, a másik a percet, harmadik a másodpercet mutatja. Egy bolha ráugrik déli 12 órakor a másodpercmutatóra és megkezdi egy órás körutazását. Ha fedésbe kerül bármely két mutató, amelyik egyikén ő volt, akkor minden esetben átugrik a másikra. Hányszor utazott körbe az óra számlapján egy óra alatt?

*(10 pont)*

## Megoldás:

12:00:00-kor ugrik rá az óra másodperc mutatójára, és megtesz egy teljes kört 12:01:00-ig (1. kör – 1. perc)

*(1 pont)*

A kismutató egy perc alatt fél fokot tesz meg, míg a nagymutató 6 fokot. Ebből adódóan 12:01:00-kor az óramutató járásával megegyezően a sorrend: másodperc mutató (mpm), kismutató (óramutató – óm), és nagymutató (percmutató – pm). Ez a sorrend minden egész percben fennáll.

*(1 pont)*

A bolha a mpm-en áll és halad tovább, majd elhalad az óm felett. Ekkor átugrik rá, és a mpm megy tovább. [Eltelik az 1. perc.] A mpm elhalad óm felett és a bolha átugrik rá, majd amikor mpm utoléri a pm-et, a bolha átugrik rá. Így a bolha pm-en lesz és a mpm megint megtesz egy kört. [Eltelik a 2. perc.] A mpm következő körben az óm után elhalad a pm felett és a bolha ráugrik, és megteszik a következő egész kört. [Eltelik a 3. perc.]

*(2 pont)*

Innentől fogva minden 3 percben megtesz egy teljes kört.

*(1 pont)*

Ezt táblázatban foglalva:

| **perc** | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 43 | 46 | 49 | 52 | 55 | 58 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **kör** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

*(2 pont)*

A fenti logikát követve az 58. perc után 61. percben tenné meg a következő kört, de mégsem.
12:58:00 perckor a mutatók sorrendje déli 12 órától az óramutató járásával megegyezően: mpm, óm, pm. A bolha a mpm-en áll. A mpm elhalad az óm felett, a bolha ráugrik, a mpm megtesz egy kört. 12:59:00, az óra utolsó perce jön. A mpm elhalad az óm felett, a bolha ráugrik és szépen utazik rajta addig, amíg el nem éri a pm-et. Ekkor átugrik rá, viszont a pm, mivel eltelik egy óra, szépen bemegy a 12 óra irányába. Így a bolha megteszi az újabb egy kört.

*(2 pont)*

Tehát 21 kört tesz meg a bolha.

*(1 pont)*

# NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2014

HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

9-10. OSZTÁLY

2014. ÁPRILIS 7.

---

2. Mennyi lesz:

   a. az együtthatók összege a $3x^3 - 2x^2 \;^{n}$ kifejezésben, ha az $n=5$ esetében elvégezzük a hatványozást és a szükséges összevonásokat? Mennyi lesz, ha $n=2014$? Válaszát indokolja!

   *(6 pont)*

   b. az $x^2 + x^5 + 1 \;^{n}$ kifejezésben az $x^{12}$ -en együtthatója, ha elvégezzük a hatványozást és a szükséges összevonásokat az $n=5$ esetén?

   *(6 pont)*

## MEGOLDÁS:

(a) feladat:

A feladat megoldása azon alapszik, hogy ha a polinomban a változók helyére 1-et helyettesítünk, akkor az együtthatók összegét kapjuk. Tekintve, hogy a zárójelben levő kifejezés $x=1$ helyettesítés esetén 1-et ad, ezért mindkét esetben $n=5$, és $n=2014$ kitevők esetén az együtthatók összege 1 lesz, hiszen $1^5$ és $1^{2014}$ is 1.

*(6 pont)*

---

(Ezen megállapításért a versenyző kapja meg a maximális pontszámot.)

Ha nincs meg ez az ötletünk, akkor az $n=5$ esetében végezzük el a hatványozást, minden tagot minden taggal összeszorozva, és elvégezve a szükséges összevonásokat, a következő polinomot kapjuk:

$$243\,x^{15} - 810\,x^{14} + 1080\,x^{13} - 720\,x^{12} + 240\,x^{11} - 32\,x^{10}$$

Ebben az együtthatók összege: 1.

*(3 pont)*

---

(Ha a versenyzőnek van egy sejtése, hogy $n=2014$ esetében is 1 lesz egy együtthatók összege, akkor adjunk 2 pontot érte.)

---

(b) feladat:

Ha az $n=5$ esetet nézzük, akkor a hatványozás definíciója szerint a következőt kapjuk:

$$(x^2+x^5+1)^5=(x^2+x^5+1)(x^2+x^5+1)(x^2+x^5+1)(x^2+x^5+1)(x^2+x^5+1)$$

*(1 pont)*

A jobb oldalon most el kellene végezni a zárójelek felbontását és minden tagot minden taggal összeszorozni, majd elvégezni a szükséges összevonásokat. Az (a) feladatrésztől eltérően itt ez rengeteg számolással jár. Inkább vizsgáljuk meg, hogy mikor kaphatunk mi $x^{12}$-t!

Mivel 2 és 5 relatív prímek egymáshoz, ezért $x^{12}$ csak úgy állhat elő $x^5$ és $x^2$ tagok szorzataként, ha valamilyen sorrendben $x^5$-t szorozzuk önmagával majd $x^2$-nal. Azaz $x^5\cdot x^5\cdot x^2=x^{5+5+2}=x^{12}$.

*(2 pont)*

Ehhez az kell, hogy valamelyik két zárójelből $x^5$-t válasszunk, majd a maradékból $x^2$-t. A többi zárójeles tényezőből pedig a zárójelben lévő 1-es tagot.

*(2 pont)*

5 tényezőből $\binom{5}{2}=10$ féleképpen tudunk két $x^5$-t választani. Ehhez kell még a maradék 3 tagból egy $x^2$-t választani, amit 3 féleképpen tehetünk meg. Így az $x^{12}$-nek az együtthatója 30.

*(1 pont)*

(Ha a versenyző a hatványozás során számolási hiba nélkül megkapja az alábbi polinomot, amiből leolvassa az $x^{12}$ együtthatóját, akkor kapja meg a maximális 6 pontot.)

$$x^{25}+5x^{22}+5x^{20}+10x^{19}+20x^{17}+10x^{16}+10x^{15}+30x^{14}+5x^{13}+30x^{12}+$$
$$+20x^{11}+11x^{10}+30x^9+5x^8+20x^7+10x^6+5x^5+10x^4+5x^2+1$$

3. A hatos lottón 6 db számot húznak ki – visszatevés nélkül – 1-től 45-ig. A sorsolás végén a kihúzott számokat sorrendbe teszik. Hány esetben fordul elő, hogy minden szám ugyanannyival nagyobb az előzőnél?

*(10 pont)*

## MEGOLDÁS:

Jelölje $a$ a legkisebb kihúzott számot, $d$ pedig a szomszédos számok különbségét. Ebben az esetben $d$ értékét úgy kell megválasztani, hogy ha $a$ -hoz még 5-ször hozzáadjuk, azaz megkapjuk a hatodik számot, az ne legyen nagyobb mint 45.

*(2 pont)*

Ebből adódóan $d$ értéke legfeljebb csak $\left[\frac{45-a}{5}\right]$ lehet, ahol jelölés az egészrészt jelenti.

*(2 pont)*

Az $a$ lehetséges értékei, és a hozzá tartozó $d$ értékek.

| ***a*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***d*** | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | ... | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Mivel 40 osztható 5-tel és egy adott szám 5-tel vett osztási maradéka csak öt féle lehet, ezért 40-ig minden lehetséges d érték ötször szerepel.

*(3 pont)*

A megoldás, a lehetséges $d$ -k összege:

$$8+8+8+8+8+7+\cdots+1=5\cdot\ 8+7+6+5+4+3+2+1\ =5\cdot 36=180$$

*(2 pont)*

Tehát 180 féle esetben fordul elő.

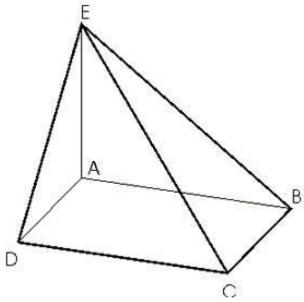
*(1 pont)*

4. Egy téglalap alakú sportpálya négy szögletét jelöljük $A, B, C, D$ pontokkal. Egy lámpa pontosan az $A$ pont felett van, jelöljük $E$ -vel. Milyen magasan van a lámpa, ha tudjuk, hogy a $DC$ távolság 7 m, a $BCE\sphericalangle\ 60^{\circ}$, a $ADE\sphericalangle\ 45^{\circ}$-os? Az feladat megoldásához készítsen ábrát!

*(15 pont)*

## MEGOLDÁS:

Készítsünk ábrát a feladathoz!




*(3 pont)*

A feladat szövege szerint az *E*-vel jelölt lámpa pont az *A* pont felett van, így az *EA* merőleges az *ABCD* síkra, valamint *AD*-re és *AB*-re. A sportpálya téglalap alakú, ezért *AD* párhuzamos és egyenlő *BC*-vel, valamint *BC* is merőleges lesz *AB*-re.

*(2 pont)*

A feladat szövege szerint – $EDA\sphericalangle\ 45^{0}$-os – és fenti gondolatmenet alapján *EDA* háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög. Így *AD*=*EA*.

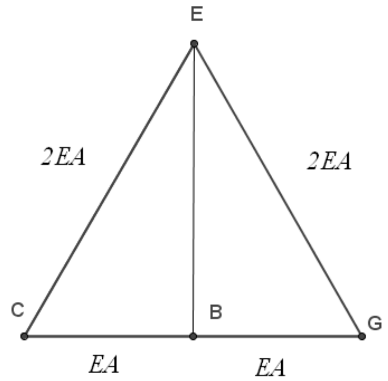
*(1 pont)*

*EA*=*AD*=*BC*. Tehát a *BC* hossz éppen *EA*.

*(1 pont)*

Mivel *BC* párhuzamos volt *AD*-vel, így a *BC* merőleges lesz *EAB* síkra is. Így *CBE* háromszög derékszögű és a *C*-nél lévő szöge $60^{0}$. Így *EB* oldal egy szabályos háromszög magassága, aminek az oldala – előbbi gondolatmenet alapján – $2EA$.

*(2 pont)*




Szabályos háromszög magassága az alap ismeretében a Pitagorasz tétel alapján:

$$EB = \sqrt{{2EA}^{2} - EA^2} = \sqrt{3EA^2} = \sqrt{3}EA$$

*(2 pont)*

Az $EAB$ derékszögű háromszögből – fenti érvelésünk alapján –, aminek $AB$ oldala 7 m (mivel a téglalap alakú sportpálya vele párhuzamos $DC$ oldalát ismertük), tudjuk, hogy $EB = \sqrt{3}EA$

*(1 pont)*

Ismét a Pitagorasz tételt alkalmazva:

$EA^2 + AB^2 = EB^2$

$EA^2 + 49 = 3EA^2$

$2EA^2 = 49$

$EA = \sqrt{\frac{49}{2}} \approx 4,95$

*(2 pont)*

Tehát a lámpa 4,95 m magasan van.

*(1 pont)*

---

5. Build Kft-nél pénzjutalmakat osztanak ki az alkalmazottak és a vezetők között. A teljes összeg 40%-át az alkalmazottak kapták, átlagosan 80000 Ft-ot, a többi 60%-ot a vezetők kapták meg átlagosan 180000 Ft-ot. Mekkora jutalmat kaptak átlagosan a vállalat dolgozói?

*(15 pont)*

## MEGOLDÁS:

A teljes jutalomösszeg legyen $x$ Ft. Az alkalmazottak száma $a$, a vezetőké pedig $v$.

*(2 pont)*

A keresett átlag: $\frac{x}{a+v}$ Ft/fő.

*(3 pont)*

A feladat szövege alapján tudjuk, hogy az alkalmazottak a teljes összeg 40%-át kapták, azaz $0,4x$ -et. Ők fejenként 80000 Ft-ot kaptak. Azaz $\frac{0,4x}{a}=80000$, amiből: $a=\frac{0,4x}{80000}$ fő.

*(3 pont)*

Hasonló gondolatmenet alapján: $v=\frac{0,6x}{180000}$ fő.

*(1 pont)*

A keresett átlag: $\frac{x}{a+v}=\frac{x}{\frac{0,4x}{80000}+\frac{0,6x}{180000}}$, amit ha egyszerűsítünk $x$-szel, azt kapjuk, hogy:

*(3 pont)*

$$\frac{1}{\frac{0,4}{80000}+\frac{0,6}{180000}}\approx\frac{1}{0,000005+0,0000033}=\frac{1}{0,0000083}=120481\text{ Ft.}$$

*(2 pont)*

Tehát a vállalat dolgozói átlagosan 120 481 Ft-ot kaptak.

*(1 pont)*

6. Negyven méter magasról kilövünk egy jelzőrakétát, ami egy másodfokú függvény pályáján halad. A rakéta 10 másodperc múlva újra eléri a 40 méteres magasságot, majd 5 másodperc múlva becsapódik. Milyen magasra repült fel a rakéta?

*(20 pont)*

## MEGOLDÁS:

A másodfokú függvényt ábrázoljuk egy olyan derékszögű koordináta rendszerben, amelyben az $x$ tengely az eltelt időt, az $y$ tengely pedig a rakéta magasságát mutatja.

*(1 pont)*

Legyen a $t$ idő függvényében a másodfokú függvényünk $f(t) = at^2 + bt + c$.

*(1 pont)*

A kilövés pillanatában az idő $t = 0$, a magasság pedig 40 m.

Így $40 = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, amiből már tudjuk, hogy $c = 40$.

*(2 pont)*

10 másodperc múlva éri el újra a 40 méteres magasságot, majd a kilövéstől számítva 15 másodperc múlva becsapódik. Azaz a magassága 0.

*(2 pont)*

$40 = f(10) = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 40$, valamint $0 = f(15) = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + 40$.

Ebből egy két ismeretlenes elsőfokú egyenletrendszert kapunk.

$$\left.\begin{aligned} 40 &= 100a + 10b + 40 \\ 0 &= 225a + 15b + 40 \end{aligned}\right\}$$

*(3 pont)*

Ennek megoldásai: $a = -\frac{8}{15}$, $b = \frac{16}{3}$.

*(4 pont)*

Ezek ismeretében a másodfokú egyenletünk: $f(t) = -\frac{8}{15}t^2 + \frac{16}{3}t + 40$

*(1 pont)*

Ennek kell meghatározni a maximumát. Ezt legkönnyebben úgy tehetjük meg, hogy teljes négyzetté alakítjuk:

$$f(t) = -\frac{8}{15}t^2 + \frac{16}{3}t + 40 = -\frac{8}{15}\left(t^2 - 10t - 75\right) = -\frac{8}{15}\left(\left(t-5\right)^2 - 25 - 75\right) = -\frac{8}{15}\left(\left(t-5\right)^2 - 100\right)$$

*(4 pont)*

$$f(t) = -\frac{8}{15}(t-5)^2 + \frac{160}{3}$$

*(1 pont)*

Tehát a rakéta $\frac{160}{3} \approx 53{,}33$ méter magasra repül.

*(1 pont)*