NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2013

HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

11-12. OSZTÁLY

2013. ÁPRILIS 8.

---

1. feladat:

Egy 25 fős osztályban van 11 fiú és 14 lány. Az iskolai bálon 7 (fiú-lány) pár fog táncolni. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

(10 pont)

Megoldás:

A párok sorrendje nem számít, viszont az, hogy ki kivel táncol, az már igen.

(3 pont)

Válasszunk ki 7 fiút, és keressünk nekik egy-egy lányt.

11 fiúból 7-et $C_{11}^{7} = \binom{11}{7} = \frac{11!}{4!7!}$ féleképpen tudunk kiválasztani.

(2 pont)

A 7 fiúhoz kell választani 7 lányt úgy, hogy a számít a sorrend. Ezt $V_{14}^{7} = \frac{14!}{7!}$ féleképpen tudjuk megtenni.

(3 pont)

Mivel minden 7 fiú kiválasztáshoz V_{14}^{7} féleképpen lehet lányt választani, ezért a C_{11}^{7} -t meg kell szorozni V_{14}^{7}-tel.

A végeredmény: $C_{11}^{7} \cdot V_{14}^{7} \left(= 330 \cdot 17297280 = 5708102400\right)$

(2 pont)

Megjegyzés

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha először 7 lányt választunk ki, majd a sorrend figyelembevételével választunk hozzá 7 fiút. A fenti gondolatmenettel mindkét megoldás teljes értékű.

NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2013

HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

11-12. OSZTÁLY

2013. ÁPRILIS 8.

---

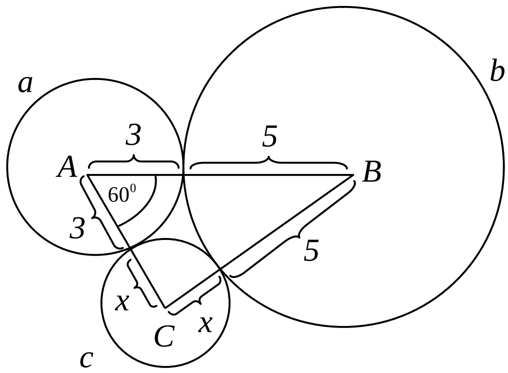
2. feladat:

Egy autógyárban a fémlemezeket két *A* és *B* hengerrel hengerelik. Az *a* henger 6 cm, a *b* henger 10 cm átmérőjű. Mivel azonban úgy ítélik meg, hogy ez kevés, ezért még egy *c* hengert is hozzáépítenek a következő módon: Mindhárom henger érinti egymást, valamint ha a hengerek középpontjait rendre *A*, *B*, *C*-vel jelöljük, akkor BAC szög éppen $60°$-os lesz. Készítsen vázlatrajzot a hengerek keresztmetszetéről és számítsa ki, hogy mekkora a harmadik henger átmérője? (A lemezvastagság elhanyagolható.)

(10 pont)

Megoldás:

Helyes vázlatrajz készítés:



(2 pont)

A BAC háromszögre felírva a koszinusz tételt a következő egyenletet kapjuk:

$$(x+5)^2 = (3+x)^2 + (3+5)^2 - 2(3+x)(3+5)\cos 60^0$$

(2 pont)

$$x^2 + 10x + 25 = 9 + 6x + x^2 + 64 - 16(x+3)\frac{1}{2}$$

(2 pont)

$$10x + 25 = 73 + 6x - 8(3+x)$$

(1 pont)

$$x = 2$$

(1 pont)

Tehát a harmadik henger átmérője 4 cm.

(2 pont)

NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2013

HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

11-12. OSZTÁLY

2013. ÁPRILIS 8.

---

3. feladat:

Számítsa ki $\frac{x}{y}$ értékét, ha $2\cdot\log_5(x-3y)=\log_5(2x)+\log_5(2y)$

(15 pont)

Megoldás:

A logaritmus definíciójából adódik, hogy:

$x-3y>0$, azaz $x>3y$, amiből $\frac{x}{y}>3$, valamint $x, y>0$ *(2 pont)*

Alkalmazva a logaritmus azonosságait a következő azonossághoz jutunk:

$\log_5(x-3y)^2=\log_5(4xy)$ *(2 pont)*

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt:

$(x-3y)^2=4xy$ *(1 pont)*

$x^2-6xy+9y^2=4xy$

$x^2-10xy+9y^2=0$

$x^2-xy-9xy+9y^2=0$

$x(x-y)-9y(x-y)=0$

$(x-y)(x-9y)=0$ *(5 pont – lépésenként 1 pont)*

Innen $x-y=0$ vagy $x-9y=0$ *(1 pont)*

Az $x-y=0$ egyenletből azt kapjuk, hogy $x=y$, amiből $\frac{x}{y}=1$, ami nem lehet, hiszen az $\frac{x}{y}>3$ kell teljesülni. *(2 pont)*

Az $x-9y=0$ egyenletből viszont azt kapjuk, hogy $x=9y$, amiből $\frac{x}{y}=9$ és ez megfelel a kiindulási feltételünknek. *(2 pont)*

NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2013

HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

11-12. OSZTÁLY

2013. ÁPRILIS 8.

---

4. feladat:

Egy mértani sorozat első eleme 3, n-edik eleme 13. Az első n elem reciprok értékeinek összege 8. Számítsa ki a sorozat első n elemének összegét!

(20 pont)

Megoldás:

A mértani sorozatról tudjuk, hogy $a_1 = 3$ és $a_n = 13$, azaz $a_n = a_1 q^{n-1} = 3q^{n-1}$. *(2 pont)*

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right)$$ *(2 pont)*

A sorozat első n elemének összege $s_n = 3\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right)$ *(2 pont)*

A sorozat első n elemének reciprokösszege:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3q} + \frac{1}{3q^2} + \cdots + \frac{1}{3q^{n-1}} = \frac{1}{3q^{n-1}}\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1\right)$$ *(6 pont)*

A feltétel szerint:

$8 = \frac{1}{13}\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1\right)$, amiből $8 \cdot 13 = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1$. *(4 pont)*

Tehát:

$$s_n = 3\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) = 3 \cdot 8 \cdot 13 = 312$$ *(4 pont)*

NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2013

HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

11-12. OSZTÁLY

2013. ÁPRILIS 8.

---

5. *feladat:*

A derékszögű Descartes-féle koordináta rendszerben mekkora területet fednek le azon $\left(x, y\right)$ pontok, amelyek teljesítik az $x^2 - 2\left|x\right| + y^2 \le 0$ egyenlőtlenséget.

(20 pont)

Megoldás:

Vizsgáljuk meg az egyenlőtlenség bal oldalát az abszolútérték definíciója alapján.

$$\left|x\right| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \ge 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$ *(2 pont)*

Ha $x \ge 0$, akkor $\left|x\right| = x$, azaz $x^2 - 2x + y^2 \le 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. *(1 pont)*

Adjunk mindkét oldalhoz 1-et: $x^2 - 2x + 1 + y^2 \le 1$ *(5 pont)*

Amit megfelelően átalakítva kapjuk, hogy $\left(x-1\right)^2 + y^2 \le 1$ *(1 pont)*

Ezt az egyenlőtlenséget az $\left(1;0\right)$ középpontú, 1 sugarú kör körvonala és a körvonalon belül lévő pontok elégítik ki. *(3 pont)*

Ennek területe: r^2® $=$ ® *(2 pont)*

Ha $x < 0$, akkor $\left|x\right| = -x$, azaz $x^2 + 2x + y^2 \le 0$ *(1 pont)*

Adjunk mindkét oldalhoz 1-et: $x^2 + 2x + 1 + y^2 \le 1$ *(1 pont)*

Amit megfelelően átalakítva kapjuk, hogy $\left(x+1\right)^2 + y^2 \le 1$ *(1 pont)*

Ezt az egyenlőtlenséget az $\left(-1;0\right)$ középpontú, 1 sugarú kör körvonala és a körvonalon belül lévő pontok elégítik ki. *(1 pont)*

Ennek területe: r^2® $=$ ® *(1 pont)*

Tehát a koordináta rendszerben azon $\left(x;y\right)$ pontpárok halmazának területe, amelyek kielégítik az $x^2 - 2\left|x\right| + y^2 \le 0$ egyenlőtlenséget 2® . *(1 pont)*

6. feladat:

Egy távoli jövőben, a föld keringési pályáját keresztezi egy kisbolygó pályája. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a keresztezési ponthoz legalább 10 perc különbséggel érkeznek, ha az előzetes számítások szerint már tudják, hogy greenwichi középidő (GMT) szerint a keresztezési ponthoz 20:00 és 20:30 között érkezik a két bolygó?

(25 pont)

Megoldás:

Jelöljük a föld érkezési idejét x-szel, a kisbolygó érkezési idejét y-nal. Így a feladatban szereplő kérdést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy egy félórás időintervallumban véletlenszerűen kiválasztva két pontot, a két pont távolsága nagyobb, mint 10 perc, azaz nagyobb mint $\frac{1}{6}$ óra.

(3 pont)

A véletlenszerűen kiválasztott két időpontot reprezentálhatjuk Descartes-féle koordinátarendszerben $(x;y)$ pontjával. Így az elemi események halmaza a koordinátarendszer azon pontja, amire fennáll, hogy $0 \le x \le \frac{1}{2}$, és $0 \le y \le \frac{1}{2}$. Ez a koordinátarendszerben egy négyzetet határoz meg (H) [lásd később].

(5 pont)

A kedvező események pedig azon pontok lesznek, amire fennáll, hogy $|x-y| \ge \frac{1}{6}$

(4 pont)

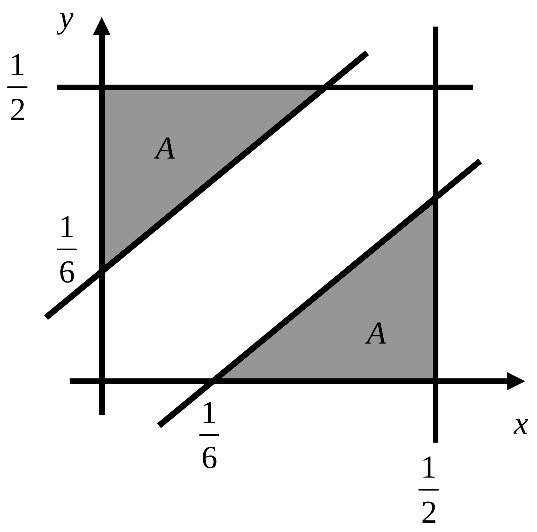
Alkalmazva az abszolútérték definícióját, azt kapjuk, hogy $x-y \ge \frac{1}{6}$ illetve $x-y \ge -\frac{1}{6}$

Innen azt kapjuk, hogy (1) $x-\frac{1}{6} \ge y$, illetve (2) $x+\frac{1}{6} \ge y$.

(4 pont)

Tehát a kedvező események a négyzeten belül azok a pontok lesznek, amelyekre teljesül a fenti két egyenlőség.

Az előbbi két egyenlőséget tekinthetjük két lineáris függvénynek is, így a kedvező eseményeket jelentő pontok azok leszek, amelyek az $y = x - \frac{1}{6}$ függvény alatt illetve a $y = x + \frac{1}{6}$ felett vannak. *(4 pont)*



A kedvező eseteket a szürkére színezett háromszögek területe (A) szimbolizálja.

Így a keresett valószínűség: $\frac{t_A}{t_H}$ *(2 pont)*

Egy kisháromszög területe: $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} = \frac{1}{18}$. A két háromszög területe: $\frac{2}{18}$ *(2 pont)*

Annak a valószínűsége, hogy a két bolygó között lesz legalább 10 perc különbség:

$$\frac{\frac{2}{18}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{18} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$ *(1 pont)*