Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely

2013. április 8.

A 9-10. osztályosok feladatainak javítókulcsa

1.

Jelöljük x-szel az adott hónapban megkezdett 100 kB-s csomagok számát. Az első szolgáltatónál a havi számla $(x-10)*150+900$ lenne, a második szolgáltatónál pedig $(x-20)*120+2800$ lenne.

(2 pont)[1]

Az első szolgáltatóval akkor járunk jobban, ha

$$(x-10)*150+900 \leq (x-20)*120+2800$$

(1 pont)

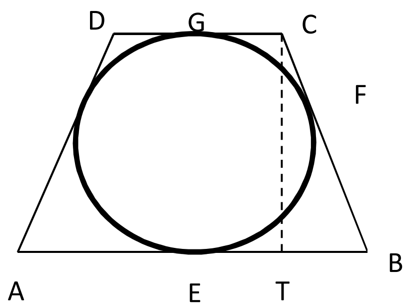
Az egyenlőtlenség megoldása $x \leq \frac{100}{3}$

(2 pont)

Figyelembe véve, hogy x-szel a megkezdett 100 kB-s csomagokat jelöltük, következik, hogy **3,3 GB-nél nem nagyobb forgalom esetén az első**, ennél magasabb forgalom esetén a második szolgáltató kifizetődőbb.

(1 pont)

2.



A trapéz AB oldala 18 CM, a CD oldal pedig 8 CM, így az AE=EB szakaszok 9, a CG szakasz pedig 4 CM hosszúak. A külső pontból húzott érintőszakaszok tulajdonsága miatt CG = CF = 4 cm, EB=BF = 9 cm. Nyilvánvaló továbbá, hogy a trapéz magassága a beírt kör sugarának kétszerese.

(3 pont)

Ezért a CTB háromszög derékszögű, a CT befogója 2r, a BT befogó 5 cm, az átfogó pedig 13 cm.

[1] Ez a két pont akkor jár, ha a versenyző bármilyen helyes formulát megad a fizetendő összegekre.

(1 pont)

Pitagorasz tétele miatt $2r = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, azaz a keresett sugár r = 6 cm.

(2 pont)

3.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján az egyenlet két gyöke

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4p}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 - p}$$

(1 pont)

Az egyenletnek akkor van valós gyöke, ha $p \leq 9$

(1 pont)

Az egyenlet nagyobbik gyöke nyilvánvalóan legalább 3, ezért nem eshet a kérdéses intervallumba, így az alábbi kettős egyenlőtlenséget kell vizsgálni:

$$-1 \leq 3 - \sqrt{9 - p} \leq 0$$

(1 pont)

A bal oldali egyenlőtlenségből $p \leq 7$, a jobb oldaliból $p \geq 0$ adódik. Ezen feltételek mellett az eredeti egyenletnek van valós gyöke, így az egyenletnek akkor van gyöke a [-1, 0] intervallumban, ha $p \in [-7, 0]$

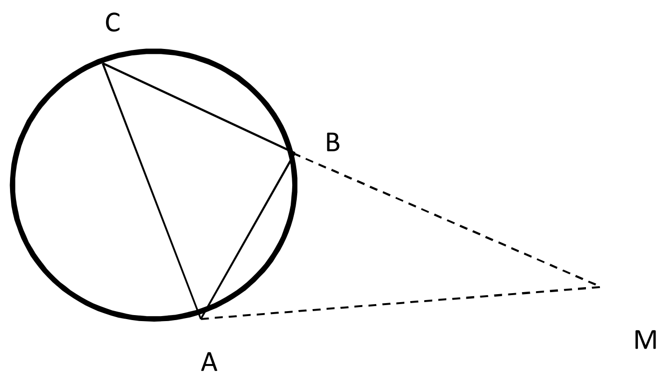
(3 pont)

Megjegyzés: a feladat a Viéte-képletek alkalmazásával is megoldható. Legyen ugyanis $a \in [-1, 0]$ az egyenlet egyik gyöke, ekkor a másik gyök (6-a), hiszen az elsőfokú tag együtthatója a gyökök összege. p értéke pedig a gyökök szorzata, azaz $p = a(6 - a)$. Az $y = a(6 - a)$ függvény vizsgálatával belátható, hogy a [-1, 0] intervallumon értékkészlete [-7, 0].

A fenti megoldás két feltétellel fogadható el teljes értékűnek:

- a versenyzőnek meg kell vizsgálnia, hogy valóban van-e valós gyöke az egyenletnek (mert a Viéte-formulák komplex gyökök esetén is érvényesek)
- legyen a dolgozatban valamilyen indoklás arra, hogy az $y = a(6 - a)$ függvény valóban felveszi a [-1, 0] intervallumon az összes, -7 és 0 közé eső értéket.

4.



Feltételezve, hogy az érintőnek és a BC egyenesének van közös pontja, és ez a pont B-n túli meghosszabbításra esik, az ábrán M-mel jelölt metszéspontot keressük.

Mivel az AM szakasz érintő, a BAM szög az AB húrhoz tartozó ún. érintőszárú kerületi szög. Ezért a kerületi szögek tétele alapján egyenlő az AB húrhoz tartozó valamennyi kerületi szöggel, így $ACB = \gamma$-val is.

(4 pont)[2]

Másrészt az ABM szög nyilvánvalóan $180 - \beta$, hiszen kiegészítő szöge az ABC szögnek. Így a keresett szög: $AMB = 180 - \left((180 - \beta) + \gamma\right) = \beta - \gamma$

(1 pont)

Vizsgálni kell még, hogy az M metszéspont valóban létezik-e, illetve mikor esik a BC egyenes B-n illetve C-n túli meghosszabbítására: nyilvánvaló, hogy a metszéspont akkor és csak akkor létezik, ha a BC nem párhuzamos az A-hoz húzott érintővel, ami pedig pontosan akkor következik be, ha $AC \neq AB$. Amennyiben A egy egyenlő szárú háromszög csúcsa, az érintő párhuzamos lesz BC-vel. Az is könnyen látható, hogy a metszéspont pontosan akkor keletkezik a B felőli oldalon, ha AB rövidebb AC-nél. Ellenkező esetben M a C felőli oldalon fog keletkezni és a keresett szög $\gamma - \beta$ lesz.

(3 pont)[3]

5.

Jelöljük az $\overline{\underbrace{1 \dots . .1}_{2013-szor}}$ számot A-val. Egyrészt $A = (10^{2012} + 10^{2011} + \cdots + 10 + 1)$, másrészt a bal oldalon álló $\overline{\underbrace{x \dots . . x}_{2013-szor}}$ szám xA –val egyenlő. Hasonlóan a jobb oldalon álló $\overline{y \underbrace{x \dots \dots . x}_{2013-szor}}$ számot is átalakíthatjuk: $\overline{yx \dots \dots . x} = y10^{2013} + xA$. Így az egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$2xA = y10^{2013} - y = y(10^{2013} - 1)$$

(4 pont)[4]

---

[2] Természetesen akkor is jár a 4 pont, ha a versenyző más úton, pl. a körülírt kör középpontjából a csúcsokhoz húzott sugarakkal való fölbontással oldja meg a feladatot. Nem adunk viszont 4 pontot, ha a versenyző csak állítja, hogy a BAM = ACB, de nem indokolja.

[3] A diszkusszió lényeges része a megoldásnak, a 3 pont csak akkor jár, ha a dolgozatból látszik, hogy a versenyző foglalkozott a három lehetséges esettel.

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon létrejött $(10^{2013}-1)$ szorzótényező egy olyan szám, ami 2013 darab 9-esből áll, ezért a jobb oldal nem más, mint $9A$. Ezért az egyenlet alakja:

$$2xA = y10^{2013} - y = y(10^{2013} - 1) = 9yA$$

Mivel x és y számjegyek, kizárólag az x=9, y=2 megoldás jöhet szóba.

(4 pont)

6.

Az egyenlet akkor és csak akkor értelmezett, ha $x \neq \pm 1$.

(1 pont)

A megoldást az abszolút érték jelek felbontása érdekében négy esetre bontva keressük:

(1 pont)[5]

a) Legyen először x<-1. Ekkor az egyenlet:

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{-x-1}$$

Ennek az egyenletnek x=1 lenne az egyetlen megoldása, ami mellett az eredeti egyenlet nem értelmezett, ezért x<-1 esetén nincs gyök.

(1 pont)

b) Legyen most $x \in (-1, 0]$. Az abszolút érték jelek elhagyása után az egyenlet:

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{x+1}$$

ami azonosság. Mivel az eredeti egyenlet az intervallum minden értékére értelmezett, minden $x \in (-1, 0]$ gyöke az eredeti egyenletnek.

(1 pont)

c) Legyen $x \in (0, 1)$. Ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1-x}{1-x} = \frac{1+x}{1+x}$$

ami szintén azonosság. Így a (0,1) intervallum elemei is mind gyökei az eredeti egyenletnek.

(1 pont)

d) Tekintsük végül az x>1 esetet, amikor a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{x-1}{1-x} = \frac{1+x}{1+x}$$

---

[4] Természetesen más, a megoldás irányába tett lényeges lépés esetén is adható a 4 pont

[5] A helyes esetszétválasztásra adunk 1 pontot

Az x-re kirótt feltételek miatt egyszerűsíthetünk, a keletkező -1 = 1 egyenletnek nyilván nincs gyöke.

(1 pont)

Összefoglalva, **az egyenlet megoldáshalmaza:** $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1})$.

(1 pont)[6]

---

[6] Mivel a megoldást a végén négy ágról kell összeszedni, mindenképp ragaszkodjunk hozzá, hogy a versenyző a végén foglalja össze a levezetés végén a megoldást!