Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely
2010. április 12.
A 11-12. osztályosok feladatainak javítókulcsa

1. feladat

Bevezetjük az $y = \cos x$ új változót és megoldjuk az alábbi másodfokú egyenlőtlenséget:

$$2y^2 \geq y + 1$$

(2 pont)

A

$$2y^2 = y + 1$$

másodfokú egyenlet megoldásai $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$.

(1 pont)

Így a másodfokú egyenlőtlenség megoldása: $y \leq -\frac{1}{2}$, vagy $y \geq 1$.

(1 pont)

Ebből, figyelembe véve, hogy y az eredeti változó koszinuszát jelölte, $-1 \leq \cos x \leq -\frac{1}{2}$, vagy $\cos x = 1$, azaz

$$x \in \left[\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right] \cup \{2k\pi\}\ (k=0, \pm1, \pm2,\dots)$$

(2 pont)

2. feladat

Legyen s_A, s_B az A, B pártokra adott szavazatok száma, q a kvóta és tfh. az A párt $3k$, a B pedig k darab mandátumot kapott.

Az A és B párt azért kapott 3k illetve k mandátumot, mert:

$$\left[\frac{s_A}{q}\right] = 3k, \text{ illetve } \left[\frac{s_B}{q}\right] = k, \text{ ahol [ ] az egészrészt jelöli}$$

(2 pont)[1]

Így $s_A \geq 3kq$ és $s_B < (k+1)q$, amiből

$$\frac{s_A}{s_B} > \frac{3k}{k+1}$$

(2 pont)

Mivel k-ról csak annyit tudunk, hogy pozitív egész, csak annyit állíthatunk biztosan, hogy $\frac{s_A}{s_B} > \frac{3}{2}$

(1 pont)

Hasonlóan kaphatunk becslést a hányados fölső korlátjára:

$s_A < (3k+1)q$ és $s_B \geq kq$, amiből

$$\frac{s_A}{s_B} < \frac{3k+1}{k},$$

(2 pont)

---

[1] Általában 2 pontot adunk a feladat szövegének bármilyen helyes, a megoldás irányába vezető formalizálásáért.

amiből $\frac{s_A}{s_B} < 4$ tetszőleges k≥1 esetén teljesül,

(1 pont)

így a pártokra leadott szavazatok aránya 1.5 és 4 között változhat.

Belátható, hogy ezek a korlátok élesek is: tfh. egy adott megyében a leadott szavazatok száma 500000, a kiosztható mandátumok száma 4, ebből következően a kvóta 100000.
Ha az A párt 300001, a B pedig 199999 szavazatot kap, akkor a szabályok értelmében az egyik 3, a másik 1 mandátumhoz jut, a szavazatok aránya pedig $\frac{300001}{199999} \approx 1.5$. Ugyanúgy 3 illetve 1 mandátumot kapna a két párt akkor is, ha az elsőre 399999, a másodikra pedig 100001-en szavaznak, holott ilyenkor a szavazatok aránya majdnem 4.

(2 pont)

3. feladat

a)
Ha betétünk p kamatlábbal a szokásos módon kamatozik, akkor év végén az eredeti összeg $r = 1 + \frac{p}{100}$-szorosát kapjuk vissza.

Havi kamatozás esetén a befektetés minden hónapban $p_h = \frac{p}{12}$ százalékkal nő, így az év végén az eredeti összeg $r_e = (1 + \frac{p}{12*100})^{12}$ – szerese lesz a számlánkon. Bizonyítandó, hogy $r_e > r$.

(2 pont)

Az egyenlőtlenséget a binomiális tétel segítségével igazoljuk:

$$r_e = \left(1 + \frac{p}{12*100}\right)^{12} = \sum_{i=0}^{12} \binom{12}{i}\left(\frac{p}{12*100}\right)^i = 1 + \frac{p}{100} + \sum_{i=2}^{12} \binom{12}{i}\left(\frac{p}{12*100}\right)^i = r + \sum_{i=2}^{12} \binom{12}{i}\left(\frac{p}{12*100}\right)^i$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség innen nyilvánvaló, hiszen a szummázásban szereplő kifejezés minden i-re pozitív.

(3 pont)

b)
p = 10 százalék esetén
$r_e = (1 + \frac{10}{12*100})^{12} = 1,1047,$ azaz havi kamatszámítás mellet a teljes éves hozam nem 10, hanem 10,47 százalék.

(2 pont)

4. feladat

Először meghatározzuk a megadott kör és az A,B pontokon átmenő egyenes metszéspontjait. Az egyenes egyenlete:

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{23}{2}$$

(1 pont)

Megoldjuk a fenti egyenes és a megadott kör egyenleteiből álló egyenletrendszert. Így kapjuk az egyenes és kör metszéspontjait: $M_1(3,10)$ és $M_2(7,8)$.

(3 pont)[2]

[2] A metszéspontok meghatározása során elkövetett számolási hibákért 1-2 pontot vonunk le. Ha a versenyző a továbbiakban jól számol a hibás metszéspontokkal, a hátralévő részre kapja meg a pontokat, feltéve, hogy a feladat nem „egyszerűsödik” (pl. 0 területű lemetszett síkidomra, vagy a kört pontosan felező egyenesre)

A továbbiakban meghatározzuk a két metszésponthoz tartozó középponti szöget, ebből kiszámolható a metszéspontok által meghatározott körcikk, illetve az $OM_1 M_2$ háromszög területe, a kettő különbsége lesz az egyik keresett körszelet területe.

(1 pont)[3]

A $\gamma = M_1OM_2$ szög nagysága a koszinusz-tétel alkalmazásával számítható: a szög koszinusza így 0,6, amiből a szög radiánban 0,9273 (fokban: 53,13).

(1 pont)

Így az M_1OM_2 *körcikk* területe $T_c = \frac{0{,}9273}{2\pi} * T_k = 11{,}59$, ahol $T_k \approx 78{,}54$ a kör területe.

Az M_1OM_2 *háromszög* területe: $T_\Delta = \frac{r^2 \sin\gamma}{2} = \frac{25\sqrt{1-0{,}36}}{2} = 10.$

Az egyik keresett körszelet területe tehát $T_c - T_\Delta = \underline{1{,}59}$, *a* másiké a körnek és ennek a körszeletnek a különbsége, azaz: *<u>76,95</u>.*

(2 pont)

5. feladat

Jelöljük a_1-gyel a számtani sorozat első tagját, a_n-nel az általános tagot, d-vel a differenciát.

Először tegyük föl, hogy n≥k.

Vegyük észre, hogy a bal oldalon álló $S_n - S_k$ különbség egy olyan számtani sorozat összege, amelynek első tagja $b_1 = a_1 + kd$, a tagjainak száma n-k, differenciája szintén *d,* így utolsó tagja $b_{n-k} = a_1 + (n-1)d$.

(3 pont)[4]

Alkalmazva az összegképletet a b sorozatra, a bizonyítandó állítás az alábbi:

$$(n+k)(n-k)\frac{a_1 + kd + a_1 + (n-1)d}{2} = (n-k)\, S_{n+k}$$

Alkalmazva S_{n+k} -ra az összegképletet, azonnal látható, hogy az állítás valóban teljesül.

(2 pont)

Az állítás nyilvánvalóan teljesül k>n esetén is, hiszen n és k szerepének felcserélését és mindkét oldal -1-gyel való szorzását követően a fenti gondolatmenet alkalmazható.

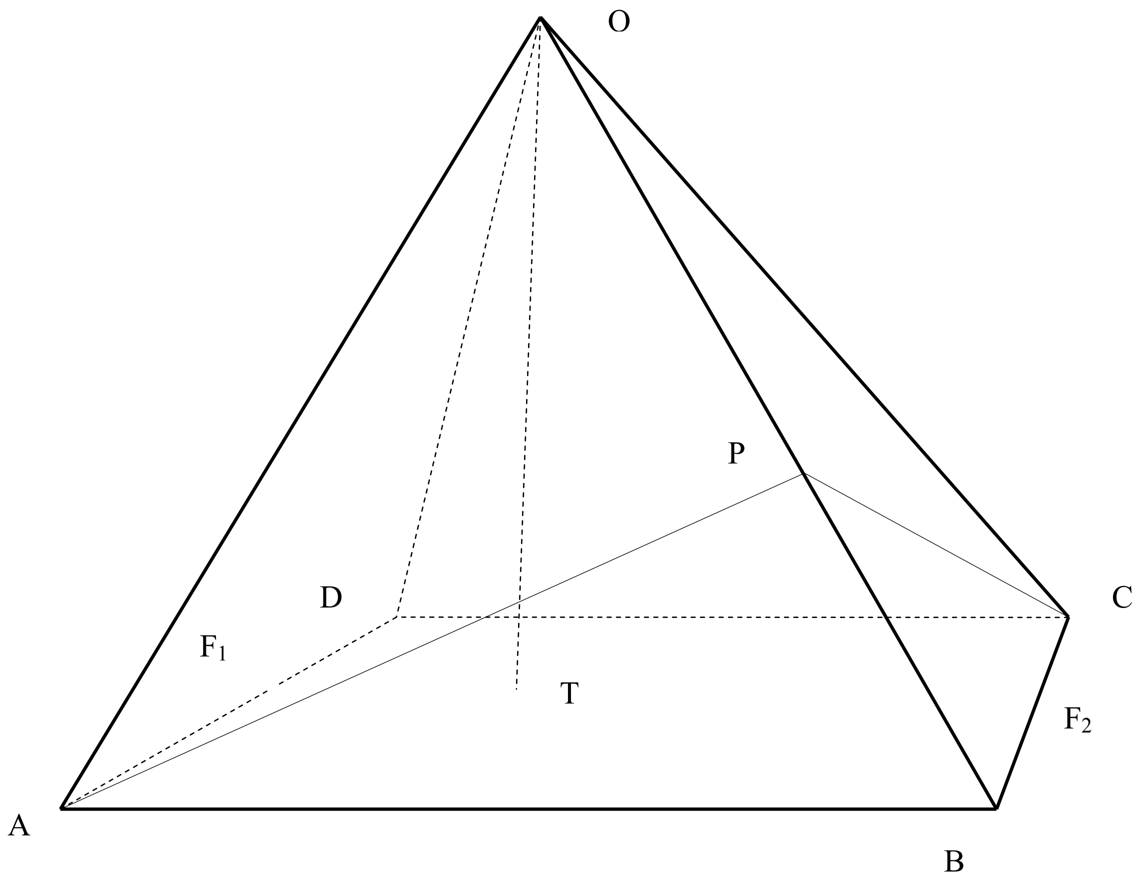
(1 pont)

[3] Ez a pont akkor is jár, ha a versenyző nem számolja végig a feladatot, de kiderül a dolgozatból a megoldás menete

[4] Természetesen ezen észrevétel nélkül, az összegképletek behelyettesítésével és valamivel több számolással szintén adható teljes értékű megoldás, amire ugyanúgy jár a maximális pontszám.

6. feladat

A feladat megoldás ismertetéséhez az alábbi ábra jelöléseit alkalmazzuk:



Az ábrán ABCD a gúla alaplapja, O a csúcspontja, F_1 és F_2 az AD és BC alaplélek felezőpontjai, T a gúla magasságának talppontja, P pedig az ABO oldallap A csúcshoz tartozó magasságának talppontja (ami egybeesik a BCO oldallap C-hez tartozó magasságának talppontjával). Világos továbbá, hogy a T pont rajta van az alaplap BD (és AC) átlóján.

(1 pont)[5]

a) Az oldalélek hossza az OTB háromszögből számítható ki Pitagorasz tétele segítségével. Világos, hogy $TB = BC\frac{\sqrt{2}}{2} = 230\frac{\sqrt{2}}{2} = 162{,}6.$ Ezért $OB = \sqrt{147^2 + 162{,}6^2} = \underline{219{,}2\ méter}$ (természetesen valamennyi oldalél ugyanilyen hosszú).

Az oldalélek vízszintessel bezárt szögét is az OTB derékszögű háromszögből határozzuk meg: a szög szinusza a gúla magasságának és oldalélének hányadosa, azaz 0,6706. Ebből a <u>TBO szög 42,11 fok</u> (0,7349 radián)[6].

(2 pont)

b) Az oldallapok vízszintessel bezárt szöge az OTF_2 derékszögű háromszögből kapható: a szög tangense $\frac{OT}{TF_2} = \frac{147}{115} = 1{,}27826087.$ Az oldallapok és az alaplap szöge így <u>51,96 fok (0,9069 radián)</u>.

(2 pont)

Az OF_1F_2 háromszögből rögtön megkapjuk a <u>szemközti oldallapok</u> által bezárt szöget is: 180 – 2*51,96 = <u>76,08 fok (1,328 radián)</u>.

(1 pont)

---

[5] Használható, az itt említett alapvető összefüggéseket szemléltető ábráért jár ez az egy pont.

[6] Fokban és radiánban egyaránt elfogadható a megoldás.

A szomszédos oldallapok által bezárt szöget az APC háromszögből számíthatjuk ki a koszinusz-tétel alkalmazásával. Ehhez előbb az OBC oldallap PC magasságát kell meghatározni. A CBO szög koszinusza az alapél felének és az oldalél hosszának hányadosa, azaz 0,5246. Ugyanezen szög szinusza 0,8514, ezért a PC szakasz hossza 230*0,8514 = 195,8 méter.
A szomszédos oldallapok által bezárt szög tehát az APC háromszög P-nél lévő szöge. A szög koszinusza a koszinusz-tétel alapján:

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 195{,}8^2 - (230\cdot\sqrt{2})^2}{2\cdot 195{,}8^2} = 0{,}3798,$$

amiből a keresett szög 112,3 fok (1,960 radián).

(2 pont)

c) A piramis térfogata $V = \frac{230*230*147}{3} = 2592100$ köbméter, tömege 5184200 tonna, így az építéséhez 259210 kamionnyi anyagot kellett megmozgatni.

(1 pont)