# NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2010

HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

9-10. OSZTÁLY

2010. ÁPRILIS 12.

---

1. Készítünk egy időszalagot 2010-ig, amin minden évszámot feltüntetünk 1-től kezdve. Hányszor írjuk le az 1-es számjegyet?

*(7 pont)*

**I. megoldás:**

Az utolsó helyi értéken, az egyesek helyén minden tizedik helyen áll 1-es. 2010-ig 201 db.

**(1 pont)**

Az utolsó előtti helyi értéken, a tizesek helyén, minden százas csoportban 10-szer írjuk le. 2010-ig. 2010-ig 20 db százas csoport van, mindegyikben 10 darab, ami egész (!). A 2000 százas csoportjában csak 1 db 1-es szerepel a tizesek helyén. 2010 –ben. Így ez 201 db 1-es.

**(3 pont)**

A következő helyi értéken, a százasok helyén, minden ezres csoportban van 1-es kezdődő szám, amit 100-szor írunk le. Két ezres csoport van, így ezek száma 200.

**(2 pont)**

Ezertől kezdődően az ezresek helyén 1000-szer írjuk le az egyest.

Összegezve: $201+201+200+1000=1601$

**(1 pont)**

**II. Megoldás.**

Nem változik a feladat megoldása, ha az 1000 alatti számokat kiegészítjük 4 jegyű számokká oly módon hogy feltöltjük nullákkal a szám elejét.

**(3 pont)**

Így 000-tól 999-ig. 1000 db szám van, ami mindegyike 3 jegyű. Összesen 3000 számjegyet írunk le. Ennek egy tizede az egyesek száma. Azaz 300 db.

**(2 pont)**

1000-től 2000-ig 300 db egyes lesz az utolsó 3 helyi értékeken, amihez hozzájön az 1000 db leírt 1-es az ezresek helyén. Azaz $300+300+1000=1600$ Ehhez még jön két egyes, 2001 és 2010-ből. Így összesen 1602 db egyest írtunk le.

**(2 pont)**

2. Hány gyermeke van annak az apának, aki minden pénzét gyermekeire hagyta a következő végrendelet szerint:
   - a legidősebb kapjon 10 000 Ft-ot és a maradék egytizedét,
   - a második legidősebb kapjon 20 000 Ft-ot és az új maradék egy tizedét,
   - a harmadik kapjon 30 000 Ft-ot és az új maradék egy tizedét és így tovább.

   Ily módon minden gyermek ugyanannyi pénzt kap.

*(13 pont)*

**Megoldás:**

Ha az örökség $n$ Ft volt, akkor a legidősebb gyermek:

$$10000+\frac{1}{n}(n-1000)$$

**(2 pont)**

forintot kapott.

A második gyermek a végrendelet értelmében:

$$20000+\frac{1}{10}\left(n-10000-\frac{1}{10}(n-10000)-20000\right)$$

**(4 pont)**

Mivel minden gyermek egyenlő rész kapott, ezért:

$$10000+\frac{1}{n}(n-1000)=20000+\frac{1}{10}\left(n-10000-\frac{1}{10}(n-10000)-20000\right)$$

**(4 pont)**

Egyenletet rendezve:

$$\frac{1}{100}(n-10000)=8000$$

$$n=810000$$

**(3 pont)**

Ellenőrzés:

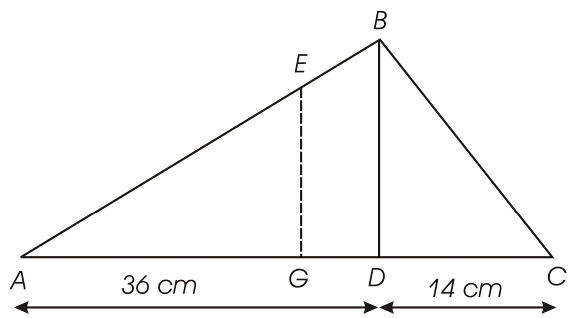
$10000+\frac{1}{10}(810000-10000)=90000$, $20000+\frac{1}{10}(720000-20000)=90000$,

$30000+\frac{1}{10}(630000-30000)=90000$, $\cdots$, $90000+\frac{1}{10}(90000-90000)=90000$.

3. Egy háromszög egyik oldalát a hozzá tartozó magasság 36 és 14 cm hosszú részekre osztja. Ezzel a magassággal párhuzamosan olyan egyenest húzunk, amely felezi a háromszög területét. Ez az egyenes mekkora részekre osztja az előbbi oldalt?

*(15 pont)*

**Megoldás:**




**(3 pont)**

Az $ADB$ és $CDB$ háromszögek alapjai egy egyenesen vannak és közös a magasságvonaluk. Ezért területük aránya egyenlő az alapok arányával, azaz:

$$\frac{T_{ABD}}{T_{CDB}} = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}$$

**(2 pont)**

Ha az $ABC$ háromszög területe $T_{ABC}$, akkor $T_{ABD} = \frac{18}{25} T_{ABC}$.

**(2 pont)**

A feladat szövege szerint $EG$ felezi az $ABC$ háromszög területét, így $AC$ oldalt $AD$ között metszi. A feladat szövege szerint: $T_{AGE} = \frac{T_{ABC}}{2}$.

**(2 pont)**

Hasonló háromszögek területe úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő oldalak négyzete.

$\frac{T_{ABC}}{2} : \frac{18}{25} T_{ABC} = AG^2 : 36^2$, tehát $AG = 30$ cm.

**(5 pont)**

$GC = AC - AG = (36+14) - 30 = 20$ cm.

Tehát 30 és 20 cm részekre osztja.

**(1 pont)**

4. Bizonyítsa be, hogy ha $k,\ m,\ n$ egymás után természetes számok, akkor

$$\sqrt[m]{\left(\frac{k}{m}\right)^k}+\sqrt[m]{\left(\frac{n}{m}\right)^n}>2$$

*(20 pont)*

**Megoldás:**

Mivel $k,\ m,\ n$ egymás utáni természetes számok, ezért: $k=m-1,\ n=m+1$. Azaz

$$\sqrt[m]{\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m-1}}+\sqrt[m]{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}>2$$

**(5 pont)**

Figyelembe véve, hogy növekvő (pozitív) hatványkitevő mellett, az egynél kisebb alapú hatványok fogynak, az egynél nagyobbak nőnek,

**(6 pont)**

ezért:

$$\sqrt[m]{\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m-1}}>\sqrt[m]{\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m}}=\frac{m-1}{m}$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}>\sqrt[m]{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m}}=\frac{m+1}{m}$$

**(6 pont)**

Alkalmazva a fenti két egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[m]{\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m-1}}+\sqrt[m]{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}>\frac{m-1}{m}+\frac{m+1}{m}=2$$

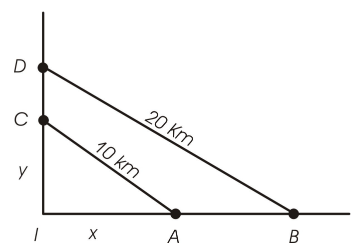
**(3 pont)**

5. A ferihegyi repülőtérről két gép száll fel. Az egyik északi, a másik keleti irányba indul. 13 óra 20 perckor mind a két gép eléri ugyanazt a magasságot, az északra tartó gép a $300\frac{km}{h}$, a keletre tartó gép pedig $400\frac{km}{h}$ utazósebességet, és ezzel a sebességgel közlekednek tovább. Ekkor 10 $km$ távolságra voltak egymástól. 1,2 perc múlva már 20 $km$ távolságra lesznek egymástól. Mekkora távolságra voltak a repülőtértől 13 óra 20 perckor?

*(20 pont)*

**Megoldás:**

Mivel az egyik gép északra, a másik keletre indult, azért ők egy derékszögű háromszög két befogóján közlekednek.




**(4 pont)**

13:20-kor az északra közlekedő gép $C$-ben van és $300\frac{km}{h}$-val, a keletre közlekedő pedig $A$-ban és $400\frac{km}{h}$-val halad a feladat szövege szerint egyenletes sebességgel. $1,2$ perc múlva $(1,2\ \text{min} = 0,02\ h)$ múlva az északra tartó gép megtesz $300\frac{km}{h}\cdot 0,02\ h = 6\ km$-t, a keletre tartó $400\frac{km}{h}\cdot 0,02\ h = 8\ km$-t. Tehát $CD = 6$ és $AB = 8$.

**(4 pont)**

Ezek figyelembevételével az alábbi összefüggést írhatjuk fel a $CIA$ és $DIB$ derékszögű háromszögekre.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 100 \\ (x+6)^2 + (y+8)^2 &= 400 \end{aligned}\right\}$$

**(2 pont)**

Alkalmazva a két tag összegére vonatkozó azonosságokat és a (2)-ből kivonva (1)-et, majd rendezve az egyenletet az kapjuk:

$$3x+4y=50 \text{ amiből: } x=\frac{50-4y}{3}$$

**(4 pont)**

Ezt visszahelyettesítve a (1)-be:

$$\left(\frac{50-4y}{3}\right)^2+y^2=100$$

$$y^2-16y+64=0$$

$$(y-8)^2=0$$

$$y=8$$

**(4 pont)**

Ebből pedig $x=6$

**(2 pont)**

6. Oldja meg a következő egyenletet:

$$(x-6)^4+(x-4)^4=512$$

*(25 pont)*

**Megoldás:**

Célszerű új ismeretlent bevezetni. Legyen ez $y=x-5$. Ekkor: $x-6=y-1$ és $x-4=y+1$

**(5 pont)**

Ekkor a negyedik hatványra való emelés után a páratlan fokszámú tagok kiesnek.

$$(y-1)^4=\left((y-1)^2\right)^2=\left((y^2+1)-2y\right)^2=\left(y^2+1\right)^2-4y\left(y^2+1\right)+4y^2$$

**(5 pont)**

$$(y+1)^4=\left((y+1)^2\right)^2=\left((y^2+1)+2y\right)^2=\left(y^2+1\right)^2+4y\left(y^2+1\right)+4y^2$$

**(5 pont)**

Innen:

$$\left(y^2+1\right)^2+4y^2+\left(y^2+1\right)^2+4y^2=512$$

$$y^4+2y^2+1+4y^2+y^4+2y^2+1+4y^2=512$$

$$2y^4+12y^2+2=512$$

$$2y^4+12y^2-510=0$$

**(4 pont)**

$y^2$ -re mint másodfokú egyenlet megoldva kapjuk:

$y^2=-3\pm\sqrt{264}$ .

**(2 pont)**

Mivel $y^2$ csak nem negatív lehet, ezért: $y^2=-3+\sqrt{264}\approx 13,248$, amiből $y_{1,2}=\pm 3,6398$

**(2 pont)**

$y=x-5$ -ből pedig

$x_1=y_1+5=1,3602$
$x_2=y_2+5=8,6398$

**(2 pont)**