NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2008

HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

11-12. OSZTÁLY

2008. április 21.

1. Oldja meg a következő egyenletet! *(10 pont)*

$$\log_4\left(12\cdot 2^x+1\right)=-x\cdot\log_9 3$$

MEGOLDÁS:

A logaritmus és a hatványozás azonosságainak felhasználásával az egyenlet jobb oldala a következő alakra hozható:

$$-x\cdot\log_9 3=\log_9 3^{-x}=\log_9 9^{-\frac{x}{2}}=-\frac{x}{2}.\ \textbf{(2 pont)}$$

Az egyenlet pedig a logaritmus definíciójának alkalmazásával az alábbi alakba írható:

$$12\cdot 2^x+1=4^{-\frac{x}{2}}.\textbf{(2 pont)}$$

Alkalmazva a $4^{-\frac{x}{2}}=2^{-x}=\frac{1}{2^x}$ helyettesítést, azt kapjuk:

$$12\cdot 2^x+1=\frac{1}{2^x}.\textbf{(2 pont)}$$

Mindkét oldalt megszorozva 2^x-nel, majd rendezve az egyenletet 2^x-ben másodfokú egyenlet kapunk:

$$12\cdot 2^{2x}+2^x-1=0.\textbf{(2 pont)}$$

Ennek megoldásai: $2^x=\frac{1}{4}$, amiből $x=-2$, valamint $2^x=-3$, x-re nem ad megoldást. **(2 pont)**

2. Egy tíztagú társaság az ötös lottón hét szám minden kombinációját megjátszotta egy-egy szelvényen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy lesz háromtalálatos szelvényük a lottóhúzáskor? Mennyi haszonra tesznek szert, ha a háromtalálatosokra 17 640 Ft-ot, a kettesekre 1 170 Ft-ot fizetnek és egy szelvény ára 200 Ft. *(14 pont)*

MEGOLDÁS:

Annak a valószínűsége, hogy lesz háromtalálatos szelvényük, ahhoz az kell, hogy megjátszott hét szám között legyen három kihúzott szám, és maradék kettőt pedig a 83 ki nem kihúzott számból legyen. Ez $\binom{7}{3}\cdot\binom{83}{2}=119\ 105$ féle képpen fordulhat elő. **(2 pont)**

Az összes lehetőség $\binom{90}{5}=43\ 949\ 268$. **(2 pont)** A klasszikus valószínűség szerint

$P(\text{három találatos})=\dfrac{119\ 105}{43\ 949\ 268}=0{,}00281$ **(2 pont)**

Ha 7 számból minden lehetséges módon 5-öt megjátszani $\binom{7}{5}=21$ féle képpen lehet. Ennyi lottószelvény kell venni. Ennek ára: 4200 Ft. **(2 pont)**

Természetesen ha a hét szám közül van három találat, akkor lesz kettes találatuk is. Annyi háromtalálatosuk lesz, ahányszor nem nyerő számot választottak hozzá a hét szám közül. Ez $\binom{4}{2}=6$ féle képpen lehet. **(2 pont)**

Tehát ennyi hármasuk van ez 105 840 Ft-ot ér. Annyi kettesük lesz, ahányszor a nyerő háromból kiválasztottak kettőt és hozzá választottak a hét szám 4 nem nyerőjéből 3-at. Azaz $\binom{3}{2}\binom{4}{3}=2\cdot 6=12$. Tehát a 12 kéttalálatos 14040 Ft-ot ér. **(2 pont)**

Összesen nyertek: 119 880 Ft-ot. Ft, fizettek: 4200 Ft-ot. Tehát 115 680 Ft haszonra tettek szert. **(2 pont)**

NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2008

HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

11-12. OSZTÁLY

2008. április 21.

---

3. Igazolja, hogy ha $a > b$ és $ab = 1$, akkor $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$! *(16 pont)*

MEGOLDÁS:

Végezzük el a következő átalakításokat és vegyük figyelembe, hogy $ab = 1$:

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b} = (a - b) + \frac{2}{a - b}$$ **.(6 pont)**

A jobb oldalon lévő két tagra alkalmazzuk a számtani mértani azonosságot:

$$\frac{(a - b) + \frac{2}{a - b}}{2} \geq \sqrt{(a - b)\frac{2}{a - b}} = \sqrt{2}$$ **(8 pont)**

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva 2-vel kapjuk a bizonyítandó állítást.

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$$ **(2 pont)**

4. Mekkora betétet kell öt éven át minden év elején a bankban elhelyeznünk, hogy évi 20%-os kamat mellett az ötödik év végén ugyanakkora legyen a követelésünk, mintha az első év elején egyszerre 100000 Ft-ot tettünk volna a bankba? *(16 pont)*

MEGOLDÁS:

Ha 100 000 Ft-ot beteszünk a bankba 5 évre évi 20 %-os kamatra, akkor a kamatos kamat számítás alapján:

$$100000\left(1+\frac{20}{100}\right)^5 = 248\ 832 \text{ Ft -unk lesz. } \textbf{(2 pont)}$$

Ugyanilyen kamatozás mellet, vajon mekkora betétet kell elhelyezni minden év elején, hogy ugyanennyi pénzünk legyen. Tegyük fel, hogy minden év elején X betétet teszünk be. Ekkor betétünk alakulása a következő lesz:

1. év végén: $1,2X$

2. év végén (betét, plusz az év elején betett X Ft, majd ennek kamata): $\left(X+1,2X\right)\cdot 1,2$

3. év végén: $\left(1,2^2X+1,2X+X\right)\cdot 1,2$

…

5. év végén: $\left(1,2^4X+1,2^3X+1,2^2X+1,2X+X\right)\cdot 1,2$ **(4 pont)**

A zárójel felbontása után és X kiemelése után az kapjuk: $\left(1,2^5+1,2^4+1,2^3+1,2^2+1,2\right)X$

(2 pont)

A zárójelben lévő összeg, egy mértani sorozat, aminek első tagja 1,2, kvóciense 1,2. Ennek összege: $\left(1,2\frac{1,2^5-1}{1,2-1}\right)X$ **(6 pont)**. Ennek kell 248 832 Ft-nak lennie. Azaz:

$$\left(1,2\frac{1,2^5-1}{1,2-1}\right)X = 248\ 832. \ \textbf{(1 pont)}$$

Amiből: $X = 27\ 865$ Ft **(1 pont)**

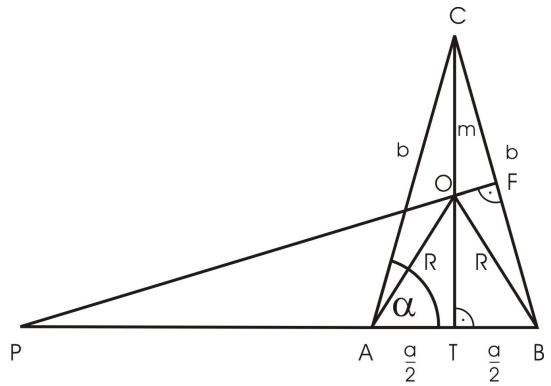
Ha nem alkalmazza a mértani sorozat összegképletét, de jó eredményt kap, akkor jár a maximális pontszám.

5. Az ABC egyenlő szárú háromszögben (AC oldal egyenlő a BC oldallal) a BC oldal felezőmerőlegese a AB oldal egyenesét a P pontban metszi. Mutassuk meg, hogy

$$R = d\left(PB\right) \cdot ctg\alpha,$$

ahol R a háromszög köré írt kör sugarát, a $d\left(PB\right)$ a PB szakasz távolságát, α az alapon az A csúcsnál lévő szöget jelenti. *(18 pont)*

MEGOLDÁS:



Használjuk az ábra jelöléseit! **(Helyes ábráért – 2 pont)**

ATC háromszögben a Pitagorasz tételt felírva: $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 = \frac{a^2}{4} + m^2$. **(2 pont)**

β szög kotangense a ATC háromszögben: $\text{ctg}\beta = \frac{\frac{a}{2}}{m} = \frac{a}{2m}$ **(2 pont)**

Az ATC háromszög hasonló a FPB háromszöghöz, hiszen szögeik megegyeznek (α és derékszög közös), így megfelelő oldalaik aránya egyenlő. $\frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{PC} \rightarrow PC = \frac{b^2}{a}$. **(2 pont)**

A ATO háromszögben felírva a Pitagorasz tételt, majd használva az eddigi összefüggéseket:

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(m - R\right)^2 = \frac{a^2}{4} + m^2 - 2mR + R^2 \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$2mR = b^2 \quad \textbf{(4 pont)}$$

$$R = \frac{b^2}{2m} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{a}{2m} = PC \cdot \text{ctg}\beta \quad \textbf{(4 pont)}$$

6. Mennyi a tízes számrendszerben felírt

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+2008\cdot 2008!$$

szám utolsó 500 számjegyének összege? *(25 pont)*

MEGOLDÁS:

Az alapgondolat a következő egyenlőség felírása: $k\cdot k!=(k+1)!-k!$ **(6 pont)**

Ezt alkalmazva a fenti számra a következő teleszkópikus összegre jutunk.

$$(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\cdots(2009!-2008!)=2009!-1$$ **(6 pont)**

Most már csak az kérdés a 2009!-nak mi az utolsó 500 számjegye.

Mivel a szorzatban többször szerepel 2-es szorzó mint ötös, ezért az ötös szorzók számát kell meghatározni. **(3 pont)**

Ugyanis minden ötös és kettes szorzó esetén egy nulla kerül a szorzat végére. 2009-ig minden ötödik számban van egy ötös szorzó. Ez 401 db. $(401\cdot 5=2005)$ **(1 pont)**

Minden huszonötödik számban vagy egy újabb ötös szorzó (öt a másodikon). Ez 80 db. $(80\cdot 25=2000)$. **(1 pont)**

Minden százhuszonötödik számban van újabb ötös szorzó. Ez 16 db. $(16\cdot 125=2000)$ **(1 pont)**

Minden 625. számban van újabb ötös szorzó. Ez 3 db. $(3\cdot 625=1875)$. **(1 pont)**

Tehát összesen: 401+80+16+3=500. **(1 pont)**

Tehát az utolsó 500 számjegy nulla. **(1 pont)**

Ha kivonunk belőle egyet, akkor az utolsó 500 számjegy mind kilences lesz. Így az összegük: $9\cdot 500=4500$ **(4 pont)**