Németh László Matematikaverseny
2008. április 21.
A 9-10. osztályosok feladatainak javítókulcsa

1. feladat

Az egyes hónapok páros ill. páratlan jegyű napjait az alábbi táblázatban összegezzük:

Hónap		Páros	Ptlan
Január	1. és 9. között 5 páros és 4 páratlan jegyű nap van, 10. és 29-e között, mindkét típusból 10-10. Jan. 30-a páros, 31-e pedig páratlan	16	15
Február	1. és 9. között 4 páros és 5 páratlan, 10. és 29. között mindkettőből 10-10	14	15
Március	Mint január (ugyanúgy 31 napos és a hónapok jegyeinek összege ugyanúgy páratlan)	16	15
Április	Februártól csak annyiban különbözik, hogy 30 napos, 2008. április 30. pedig páratlan jegyű	14	16
Május	Ld. január, március	16	15
Június	Ld. április	14	16
Július	Ld. január, március	16	15
Augusztus	Fordítva „működik”, mint január (mert a hónapok jegyeinek összege itt páros)	15	16
Szeptember	Pont fordítottja áprilisnak és júniusnak	16	14
Október	Ld. január	16	15
November	Ld. április (mert a hónapok jegyeinek összege páros!)	14	16
December	Ld. január	16	15
Összesen		183	183

(6 pont)[1]

2. feladat

Legyen p és q az eredeti tört számlálója és nevezője. A feladat szövege alapján az alábbi, két ismeretlenes egyenletrendszert írhatjuk föl:

$$\frac{p+1}{q+1}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{p-1}{q-1}=\frac{1}{2}$$

(1 pont)

Az egyenletrendszert megoldva a $p=3$, $q=5$ gyököt kapjuk, az eredeti tört számlálója tehát 3, a nevezője 5.

(2 pont)

A b) kérdésre a válasz igen, amit az alábbi indoklás mutat:

[1] A hibátlan, jól indokolt megoldásra 6 pontot adunk.
Nem jár pont a megoldásra, ha a versenyző indoklás nélkül megtippeli a végeredményt.
2 pontot adjunk a dolgozatra, ha a versenyző odáig „egyszerűsíti” a feladatot, hogy felváltva számolja a páros/páratlan napokat.
Kisebb tévedésekért (elszámolás, február 29. „kifelejtése”) 1-1 pontot vonjunk le.

Legyen d tetszőleges pozitív szám, bizonyítandó, hogy

$$\frac{3+d}{5+d} > \frac{3}{5}$$

(1 pont)

Mivel 5+d pozitív, az egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozhatjuk 5(5+d)-vel, így az alábbi, az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kell igazolnunk:

$15 + 5d > 15 + 3d$

(2 pont)

ami nyilvánvalóan igaz, hiszen d pozitív.

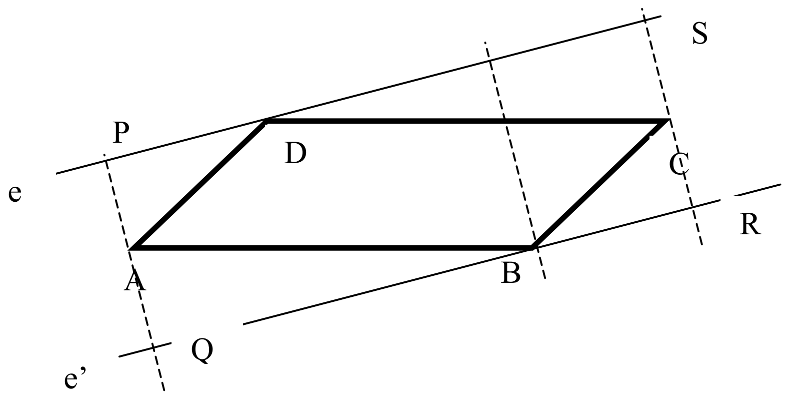
(1 pont)[2]

3. feladat

Elegendő azt az esetet vizsgálnunk, amikor az egyenes átmegy a paralelogramma egyik csúcsán, de nem metszi azt. Ellenkező esetben ugyanis eltolhatjuk az egyenest addig, amíg el nem éri az egyik csúcsot. Az eltolás következtében a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldala ugyanannyival csökken, tehát az igazolandó állításon ekvivalens átalakítást végzünk.

(2 pont)

Adott tehát a paralelogramma és az egyenes az ábra szerint:



Egészítsük ki az ábrát az e-vel párhuzamos e' egyenessel, valamit rajzoljuk be a az e-re merőleges, A, B és C csúcsokon átmenő egyeneseket. Az eltolás következtében t(D)=0, az igazolandó állítás tehát t(B) = t(A) + t(C).

(1 pont)

A PQRS négyszög nyilvánvalóan téglalap, továbbá t(B) = PQ = PA + AQ. Mivel PA = t(A), elegendő igazolnunk, hogy AQ = t(C), ami szintén nyilvánvaló, hiszen az AQB és CSD háromszögek egybevágóak.

(3 pont)

4. feladat

Rendezzük az egyenletet az alábbi alakra:

$$(p-2)x = 5p + 2$$

(1 pont)

p=2 esetén a bal oldal 0, a jobb oldal 2, ilyenkor tehát nincs gyök.

(1 pont)

Ha $p \neq 2$, akkor az egyenlet gyöke

$$x = \frac{5p+2}{p-2}$$

(1 pont)

---

[2] A b) részre akkor adunk 4 pontot, ha az indoklás során a versenyző kitér annak igazolására, hogy az elvégzett átalakítások ekvivalensek. Amennyiben ezt elmulasztja, 1 vagy 2 pontot levonunk, attól függően, mennyire hiányos az indoklás.

Ha $p < -\frac{2}{5}$, akkor a számláló és nevező egyaránt negatív, ilyenkor *x pozitív* lesz.

$p = -\frac{2}{5}$ esetén $x=0$.

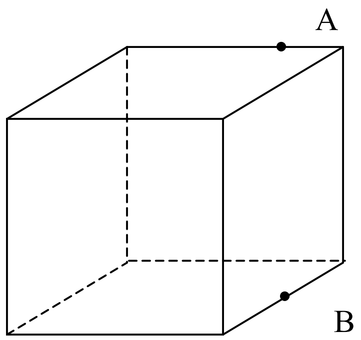
$p \in (-\frac{2}{5}, 2)$ esetén a számláló pozitív, a nevező negatív, ilyenkor tehát *x negatív*.

$p > 2$ esetén a számláló és a nevező egyaránt pozitív, ilyenkor tehát *x pozitív*.

(3 pont)

5. feladat

Az oldallapokat összehajtva az A és B pontok az alábbi helyzetbe kerülnek:



(2 pont)

Az AB szakasz tehát egy olyan téglatest testátlója lesz, amelynek egy csúcsban összefutó élei rendre 10, 5 és 3 cm hosszúak.

(2 pont)

Pitagorasz tételének kétszeri alkalmazásával a keresett távolság $\sqrt{100+25+9} = \sqrt{134} \approx 11.58$ cm.

(2 pont)

6. feladat

a) Tartozzanak az 1,2 és 3 számok az első csoportba, a 4,5,6 számok a másodikba és a 7,8,9 számok a harmadikba (a többi számot osszuk be tetszőlegesen). Ekkor az első csoport középső eleme 3, a másodiké 6, a harmadiké pedig 9 lesz. A másik két csoport csak 9-nél nagyobb számokat tartalmaz, ezért azok középső elemei biztosan nagyobbak lesznek 9-nél. Így csoportok középső elemei közül 9 lesz a középső.

(4 pont)

b) Jelöljük rendre $m_1,\dots, m_5$ –tel az egyes csoportok középső elemeit és legyen $m_1 < \dots < m_5$. Ekkor m_3 egyrészt középső elem a saját csoportjában, továbbá nagyobb m_1-*nél és* m_2-*nél*, valamint az első és második csoportban két-két további számnál (mert m_1 *és* m_2 középső elemek a saját csoportjukban). Így m_3 biztosan nagyobb 8 számnál, tehát nem lehet kisebb 9-nél.

(4 pont)

Ugyanakkor az a) rész indoklása mutatja, hogy a „közepek közepe” valóban lehet is 9.

(1 pont)[3]

A fentivel analóg gondolatmenet igazolja, hogy a „közepek közepe” biztosan nem nagyobb 17-nél és lehet is 17 (az előzőhöz hasonló elrendezéssel).

(2 pont)

[3] Ezt az 1 pontot akkor kaphatja meg a versenyző, ha kitért arra, hogy 9 nem elméleti alsó korlát, hanem valóban elérhető.