Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely
2007. április 16.
A 9-10. osztályosok feladatai

Feladatok csak 9. osztályosoknak

1. Az alábbi feladatokat közelítő számítás használata nélkül kell megoldani:

a) mennyi a $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ kifejezés pontos értéke?

b) melyik a nagyobb: $\dfrac{17}{7+4\sqrt{2}}$ vagy $\sqrt{5}-1$?

(6 pont)

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{4-x}{6} = \left|\{x\}-\frac{1}{3}\right|$$

(tetszőleges z valós számra {z} a z szám törtrészét, azaz z-[z] –t jelöli, ahol [z] a z szám egészrésze, vagyis a nála nem nagyobb egész számok maximuma).

(8 pont)

A 9. és 10. osztályosok feladatai

3. Egy ABCD trapézban az AB alapon fekvő szögek összege 90 fok. Az AB felezőpontját E, a CD felezőpontját F-fel jelölve mutassuk meg, hogy

$$EF = \frac{AB - CD}{2}$$

(7 pont)

4. Egy háromszög két oldalával párhuzamosan megrajzoljuk azokat az egyeneseket, amelyek felezik a háromszög területét. Milyen arányban osztja a háromszög területét a metszéspontjukon áthaladó, a háromszög harmadik oldalával párhuzamos egyenes?

(6 pont)

5. Határozza meg a legkisebb olyan *pozitív egész* számokat, amelyek teljesítik a

$$45x^4 = 28y^3$$

egyenletet!

(8 pont)

6. Legyenek x,y olyan valós számok, amelyekre xy = 1 és x>y. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$$

Milyen x,y értékek esetén egyenlő a két oldal?

(8 pont)

Feladatok csak 10. osztályosoknak

7. Egy négyzet alapú hasáb minden oldalát befestjük, majd a hasábot 1 cm oldalú kockákra vágjuk szét (a hasáb éleinek hossza centiméterben mérve egész számok). Mekkorák voltak a hasáb oldalai, ha a keletkező kis kockák közül 336 darabnak pontosan egy, 92-nek pedig pontosan két festett oldala van?

(5 pont)

8. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^2 - 1 = [2x]$$

(tetszőleges z valós számra [z] a szám egészrészét, azaz a nála nem nagyobb egész számok maximumát jelöli).

(7 pont)