Németh László Matematikaverseny
2007. április 16.
A 9-10. osztályosok feladatainak javítókulcsa

Feladatok csak 9. osztályosoknak

1. feladat

a) Vegyük észre, hogy $7 + 5\sqrt{2}$ felírható $1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2}$ alakban, így $(1 + \sqrt{2})^3$ -nel egyenlő. Hasonlóan $7 - 5\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^3$, így a köbgyökök összege 2.

(3 pont)

b) A bal oldali kifejezés nevezőjét gyöktelenítjük:

$\frac{17}{7 + 4\sqrt{2}} \cdot \frac{7 - 4\sqrt{2}}{7 - 4\sqrt{2}} = 7 - 4\sqrt{2}$, ezt kell $\sqrt{5} - 1$ –gyel összehasonlítani. Átrendezve ez a következő két szám összehasonlítását igényli:

$$8 \ ? \ 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

Mivel mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés és az azt követő átrendezés az egyenlőtlenség irányát nem befolyásolja, így az eredeti kérdéssel egyenértékű a

$$27 \ ? \ 8\sqrt{10}$$

kifejezések összehasonlítása. Ismételt négyzetre emeléssel meggyőződhetünk arról, hogy a **bal oldal a nagyobb**.

(3 pont)

Megjegyzés: ha a versenyző a levezetés során „elkeveri” az irányt, de egyébként jól számol, 1 pontot vonunk le. Ugyancsak 1 pontot vonunk le, ha az indoklásban nem tér ki az átalakítások ekvivalenciájának vizsgálatára (négyzetre emelés megtehető).

2. feladat

Az x tengelyt olyan részintervallumokra bontjuk, amelyeken belül a törtrész-képzés és az abszolút érték jele elhagyható.

Tegyük fel először, hogy valamely k egész számra $x \in [k, k + \frac{1}{3})$. Ekkor $\{x\} = x - k < \frac{1}{3}$, ezért az abszolút értéken belüli rész negatív, a jobb oldali kifejezés tehát $k + \frac{1}{3} - x$. Így azzal a feltétellel, hogy x valamely k-ra az említett intervallumba esik, megoldandó a $\frac{4-x}{6} = k + \frac{1}{3} - x$ egyenlet. Az egyenlet megoldása $x = \frac{6k - 2}{5}$, ami természetesen csak akkor fogadható el, ha a $[k, k + \frac{1}{3})$ intervallumba esik. Meghatározandók tehát azon k egészek, amelyekre a $k \le \frac{6k - 2}{5} < k + \frac{1}{3}$ kettős egyenlőtlenség teljesül. k lehetséges értékei 2 és 3, amiből **x értékére 2 illetve $\frac{16}{5}$** adódik.

(5 pont)

A fenti gondolatmenet alkalmazható abban az esetben is, amikor valamely k egész számra $x \in [k + \frac{1}{3}, k + 1)$. Ekkor a megoldandó egyenlet: $\frac{4-x}{6} = x - k - \frac{1}{3}$. Az egyenlet megoldása

$x = \frac{6}{7}(k+1)$, ami akkor fogadható el, ha teljesülnek a $k + \frac{1}{3} \le \frac{6}{7}(k+1) < k + 1$ egyenlőtlenségek. Ez k=0, 1, 2 és 3 esetén következik be, ezekből x értékére rendre **$\frac{6}{7}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{18}{7}$ illetve $\frac{27}{7}$ adódik.**

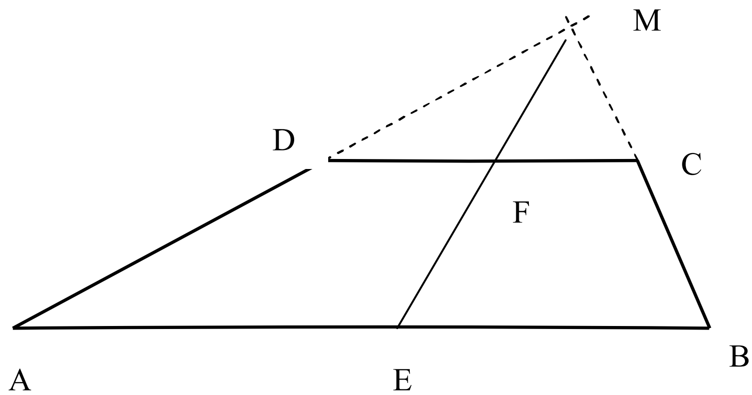
Az egyenletnek összesen tehát hat gyöke van: **$\frac{6}{7}$, $\frac{12}{7}$, 2, $\frac{18}{7}$, $\frac{16}{5}$ és $\frac{24}{7}$**

(3 pont)

Megjegyzés: bármilyen jó kiindulásra (akár jól indokolt grafikus megközelítésre is), amiből látható, hogyan bontható az eredeti egyenlet kezelhető egyenletekre, adjunk 3 pontot. A további 5 pont arányos részét adjuk az egyes alesetek végigszámolásáért.

A 9. és 10. osztályosok feladatai

3. feladat



Hosszabbítsuk meg az AD és BC szárakat az ábra szerint, a metszéspontjukat jelöljük M-mel. Mivel az A-nál és B-nél lévő szögek a feltétel szerint 90 fokra egészítik ki egymást, M-nél derékszöget kapunk. Az E pont felezi az AB alapot, így Thalész tétele alapján az M pont az E középpontú, AB átmérőjű körön lesz, továbbá $AE = EB = EM = \frac{AB}{2}$.

Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy az M pont az F középpontú, DC átmérőjű körön is rajta van, továbbá $DF = FC = FM = \frac{CD}{2}$

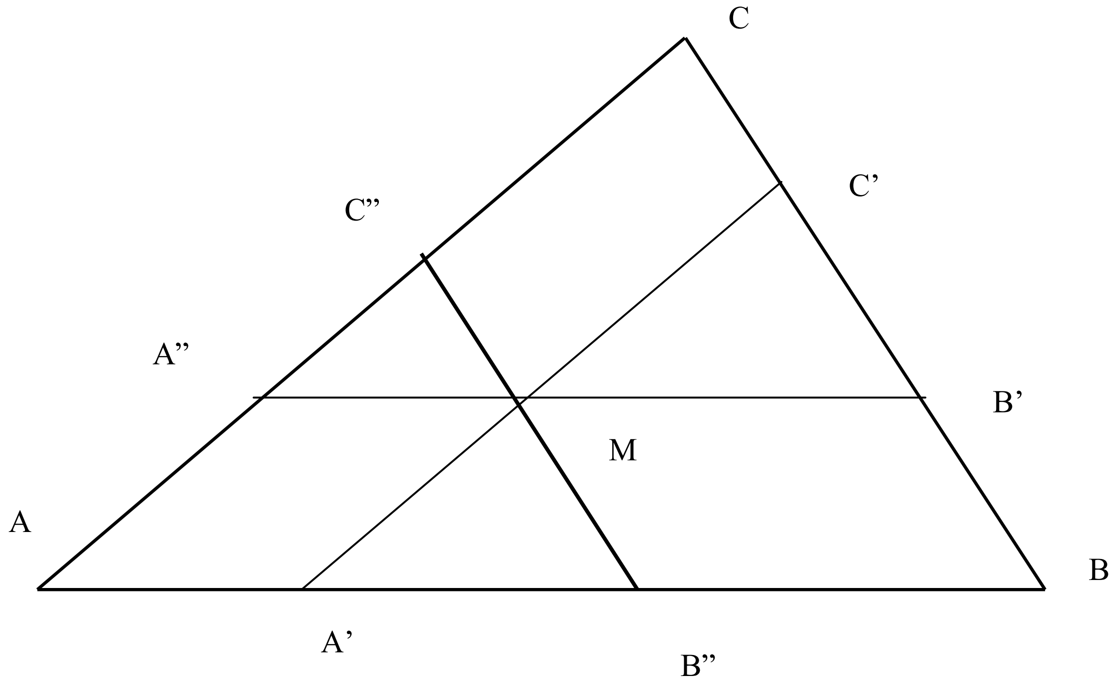
ABM és DCM háromszögek hasonlóságából, továbbá abból, hogy az E és F pontok felezik a megfelelő oldalakat, következik, hogy az E, F és M pontok egy egyenesbe esnek, így viszont $EF = EM – FM = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2}$, amit bizonyítani kellett.

Pontozás:

- az összesen adható 7 pontból 4-et adunk, ha a versenyző értékes részeredményt ér el.
- gondolatmenetében jó, de nem kellően indokolt megoldás esetén, az indoklás hiányosságaitól függően 1-3 pontot vonunk le.

4. feladat

Az alábbi ábrán a háromszög területét felező egyenesek legyenek az A'C' és a B'A", a feladat annak meghatározása, hogy az M metszéspontjukon át BC-vel párhuzamosan húzott B"C" szakasz milyen arányban osztja a háromszög területét.



Az A"B'C háromszög a feltételek miatt hasonló ABC-hez és területe fele ABC területének, ezért $B'C = \frac{BC}{\sqrt{2}}$, így $BB' = BC(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Hasonló okok miatt CC' ugyancsak $BC(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$-vel egyenlő, így $B'C' = BC(\sqrt{2}-1)$.

(2 pont)

Világos, hogy az MB'C' háromszög hasonló ABC-hez, a fentiek alapján pedig a hasonlóság aránya $(\sqrt{2}-1)$. Ebből viszont következik, hogy a megfelelő oldalakhoz tartozó magasság aránya is ugyanez, azaz a B'C' oldalhoz tartozó magasság $(\sqrt{2}-1)$-szerese az ABC háromszög BC oldalhoz tartozó magasságának.

Így viszont megkapható az (ABC-hez ugyancsak hasonló) AB"C" háromszög magassága is, hiszen az nem más, mint ABC és MB'C' magasságainak különbsége. Így a AB"C"-ben a A csúcshoz tartozó magasság az ABC háromszög A-hoz tartozó magasságának $(1 -(\sqrt{2}-1))= (2-\sqrt{2})$-szerese.

(3 pont)

Így az AB"C" háromszög területe $(2-\sqrt{2})^2 = (6 - 4\sqrt{2})$-szerese az eredeti háromszögének.

A BB"C"C trapéz területe az ABC háromszög területének $1 - (6 - 4\sqrt{2}) = (4\sqrt{2} - 5)$-szöröse, a keresett területarány tehát a két terület hányadosa, ami a felírás sorrendjétől függően $\frac{4\sqrt{2} - 2}{7}$ vagy $\frac{2\sqrt{2} + 1}{2}$

(1 pont)

5. feladat

Tegyük föl, hogy x,y megoldása az egyenletnek és jelöljük M-mel azt a számot, amivel a két oldal egyenlő. Nyilvánvaló, hogy M prímtényezős felbontásában a 2,3,5 és 7 prímek pozitív kitevővel fordulnak elő, hiszen a bal oldal miatt M-nek 3-mal és 5-tel, a jobb oldal miatt pedig 2-vel és 7-tel kell oszthatónak lennie. Mivel a legkisebb megoldást keressük, M-nek más törzstényezői nem is lesznek. Az is világos, hogy x,y akkor és csak akkor a lehető legkisebbek, ha M is az.

Tudjuk tehát, hogy M $2^i\,3^j5^k7^m$ alakú valamely i, j, k, m pozitív egészekre. A két oldal csak úgy lehet egyenlő, ha minden prímtényező mindkét oldalon ugyanolyan együtthatóval szerepel.
A bal oldalon a 2-es törzstényezők száma $4q_x$, a jobb oldalon pedig $2 + 3q_y$, ahol q_x, q_y rendre az x illetve y 2-es törzstényezőinek számát jelöli. A legkisebb q_x, q_y értékpár, amelyre $4q_x = 2 + 3q_y$ teljesül, $q_x = 2, q_y = 2$ lesz, tehát x-nek és y-nak egyaránt 2 darab 2-es törzstényezője lesz.
Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a 3-as törzstényező kitevője x felbontásában 1, y-éban 2, az 5-ös törzstényező kitevője x felbontásában 2, y-éban 3, a 7-es törzstényező pedig x-ben és y-ban egyaránt 1 kitevővel szerepel.

Így $x = 2^2\,3^15^27^1 = 2100$, $y = 2^2\,3^25^37^1 = 31500$

Pontozás: a jó gondolatmenetért 4, a kitevők és az eredmény kiszámításáért további 4 pontot adunk. Hiányos indoklás (de jó gondolatmenet és helyes eredmény) esetén a hiányosság mértékétől függően 1-4 pontot vonunk le.

6. feladat

Kihasználva, hogy xy = 1, a számláló átalakítható:
$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2xy + 2 = (x - y)^2 + 2$. Az x>y feltétel miatt a tört egyszerűsíthető, így a bal oldal az alábbi módon alakítható:

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{(x - y)^2 + 2}{x-y} = (x-y) + \frac{2}{x-y}$$

(3 pont)

A feltételek szerint x-y pozitív, így (x - y)-ra és $\frac{2}{x-y}$-ra alkalmazható a számtani és mértani közép közötti összefüggés:

$$\frac{(x-y) + \frac{2}{x-y}}{2} \geq \sqrt{(x-y)\ \frac{2}{x-y}} = \sqrt{2},$$

tehát $(x-y) + \frac{2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$, amiből közvetlenül a bizonyítandó állítást kapjuk.

(3 pont)

A levezetésből (valamint a számtani és mértani közép közötti összefüggésből az is látható, hogy egyenlőség akkor teljesül, ha $(x - y) = \frac{2}{x-y}$, azaz $(x-y) = \sqrt{2}$. Figyelembe véve, hogy a kezdeti feltételünk értelmében $y = \frac{1}{x}$, a következő, másodfokúra visszavezethető egyenletet kapjuk: $x - \frac{1}{x} = \sqrt{2}$, vagyis $x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$.

Az egyenlet gyökei:

$x_1 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{2}$, amiből

$y_1 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$

Így az eredeti egyenlőtlenség akkor teljesül egyenlőséggel, ha **$x_1 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$, vagy $x_2 = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{2}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$**.

(2 pont)

Pontozás: általában 3 pontot adunk az eredeti egyenlőtlenség bármely olyan átalakításáért, ami a megoldás irányába mutathat, további 3-at valamely ismert egyenlőtlenség (akár a számtani és mértani közép közötti, akár pl. az $x + \frac{1}{x} \geq 2$ alkalmazásáért. Az egyenlőséget eredményező esetek „felderítéséért” 2 pont jár.

Feladatok csak 10. osztályosoknak

7. feladat

Jelöljük a hasáb alapélének hosszát a-val, a magasságát pedig b-vel. Egyetlen festett lapjuk azoknak a kis kockáknak lesz, amelyek a hasáb felszínén találhatók, de nem esnek a hasáb éleire. Ilyen kis kocka a két alaplapon összesen $2(a-2)^2$ darab van, a négy odallapon pedig $4(a-2)(b-2)$ darab, így az alábbi egyenlet írható fel:

$$2(a-2)^2 + 4(a-2)(b-2) = 336$$

Pontosan két festett lapjuk azoknak a kockáknak lesz, amelyek a hasáb élein találhatók, ilyenből az alapéleken összesen $8(a-2)$, az oldaléleken pedig $4(b-2)$ van. Ebből a

$$8(a-2) + 4(b-2) = 92$$

egyenletet kapjuk.

(3 pont)

Az egyenletrendszer egyszerűsítés, illetve az $x=a-2$, $y=b-2$ új változók bevezetése után

$$x^2 + 2xy = 168$$
$$2x + y = 23$$

alakra hozható. A második egyenletből y-t kifejezve és az elsőbe helyettesítve a

$$3x^2 - 46x + 168 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei $x_1 = \frac{28}{3}$ és $x_2 = 6$. Az első gyök nem felel meg a feladat eredeti tartalmának, a másodikból $y = 11$, így a **hasáb alapélei 8, oldalélei pedig 13** cm hosszúak.

(2 pont)

8. feladat

Az x tengelyt olyan részintervallumokra bontjuk, amelyeken belül a törtrész-képzés elhagyható.

Tegyük fel, hogy valamely k egész számra $x \in [\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2})$. Ekkor $2x \in [k, k+1)$, ezért az egyenlet jobb oldala k-val egyenlő. Így azzal a feltétellel, hogy x valamely k-ra az említett intervallumba esik, megoldandó az

$$x^2 - 1 = k \text{ egyenlet.}$$

$k < -1$ esetén az egyenletnek nincs gyöke, $k = -1$ esetén $x = 0$, $k > -1$ esetén pedig $x = \pm\sqrt{k+1}$, de mindegyik csak akkor fogadható el, ha az adott k-ra teljesül a $\frac{k}{2} \le x < \frac{k+1}{2}$ kettős egyenlőtlenség.
$k=-1$, $x=0$ esetén nem teljesül, így $x=0$ nem gyöke az eredeti egyenletnek.

Ha $k>-1$, azaz $k\ge 0$, akkor világos, hogy $x = -\sqrt{k+1}$ nem lehet megoldása az eredeti egyenletnek, hiszen ilyenkor x negatív lenne és nem teljesülne a $\frac{k}{2} \le x$ feltétel.

Legyen most $k>-1$, $x = \sqrt{k+1}$, megvizsgáljuk, k mely értékeire teljesül, hogy
$\frac{k}{2} \le \sqrt{k+1} < \frac{k+1}{2}$

A bal oldali egyenlőtlenség négyzetre emelés és átrendezés után $k^2 - 4k - 4 \le 0$ alakú lesz, ami a $0 \le k \le 4$ egészekre teljesül

A jobb oldali egyenlőtlenség (figyelembe véve, hogy k+1 pozitív, így oszthatunk a gyökével)
$1 < \frac{\sqrt{k+1}}{2}$ alakra egyszerűsíthető, amiből $k>3$.
A kettős egyenlőtlenség tehát csak $k=4$ értéke mellett teljesül, így $x = \sqrt{k+1}$ csak $k=4$ esetén gyöke az egyenletnek, ekkor x értéke $\sqrt{5}$.
Az eredeti egyenlet **egyetlen gyöke** tehát $\mathbf{x = \sqrt{5}}$.

Pontozás: bármilyen jó kiindulásra (akár jól indokolt grafikus megközelítésre is), amiből látható, hogyan bontható az eredeti egyenlet kezelhető egyenletekre, adjunk 3 pontot. A további 4 pont arányos részét adjuk az egyes alesetek végigszámolásáért.