Hódmezővásárhelyi Városi Matematikaverseny
2006. április 21.
A 11 - 12. osztályosok feladatainak javítókulcsa

1. feladat

Tegyük föl, hogy 2007. január elsején X összeget helyezünk el. Az első kivét után a számla egyenlege

$$E_1 = Xq - t \qquad (t=100000,\ q=1{,}06)$$

A második kivét után az egyenleg

$$E_2 = Xq^2 - qt - t,$$

a harmadik kivét után

$$E_3 = Xq^3 - q^2 t - qt - t,$$

az n-edik után

$$E_n = Xq^n - q^{n-1} t - \ldots - qt - t = Xq^n - t\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

(3 pont)

X-et úgy kell megválasztanunk, hogy

$$Xq^n \ge t\frac{q^n-1}{q-1}, \text{ azaz } X \ge t\frac{q^n-1}{(q-1)\,q^n} \text{ teljesüljön}$$

t=100000, q=1,06, n=11 helyettesítéssel (négy értékes jegyre kerekítve) $X \ge 788700$, ekkora összeget kell tehát 2007. január elsején befektetnünk.

(2 pont)

2. feladat

Jelölje F az AC oldal azon pontját, amelyben az oldalt a B-ből induló szögfelező metszi. A szögfelező-tételből ismert, hogy $\frac{AF}{FC} = \frac{7}{2}$, így alkalmasan választott x-re az AF szakasz hossza 7x, az FC szakaszé pedig 2x. A B-nél lévő szöget β-val jelölve és az AFB, FCB háromszögekre a koszinusz-tételt felírva kapjuk, hogy

$$49x^2 = 49 + 9 - 42\cos\frac{\beta}{2} \text{ és}$$

$$4x^2 = 4 + 9 - 12\cos\frac{\beta}{2}$$

(4 pont)[1]

Az első egyenletet 4-gyel, a másodikat 49-cel szorozva a bal oldalak egyenlőkké válnak, így

$$232 - 168\cos\frac{\beta}{2} = 637 - 588\cos\frac{\beta}{2}, \text{ amiből}$$

[1] Természetesen az itt megadottól eltérő gondolatmenettel is kapható egyenlet a háromszög valamely hiányzó adatának meghatározásához. A 4 pont akkor jár a versenyzőnek, ha eljut bármilyen egyenlethez vagy egyenletrendszerhez, amelyből már egyszerű rendezéssel meghatározható valamelyik hiányzó szög vagy az AC oldal.

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{27}{28}$$

(1 pont)

Innen β=30,72 fok, a koszinusz-tétel ismételt alkalmazásával a b oldal 5,379 egység, a szinusz-tétel alkalmazásával pedig az α és γ szögek pedig rendre 10,95 illetve 138,3 fokosak.

(2 pont)

3. feladat

Mindkét pontból merőlegest állítunk az AB szakaszt tartalmazó egyenesre. Amennyiben az merőleges egyenes talppontja az A és B pontok közé esik, a keresett távolság a talpponttól, egyébként a szakasz valamely végpontjától mérendő.

(3 pont)[2]

Az AB szakaszt tartalmazó egyenes egyenlete: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

(1 pont)

A C-ből az AB-re állított merőleges egyenlete: y = -3x - 14, a talppont koordinátái: $T(-\frac{43}{10}, -\frac{11}{10})$ Ez a pont az AB szakaszon kívülre esik és a két végpont közül az A-hoz lesz közelebb, így a C pont szakasztól vett távolsága az AC = $2\sqrt{10}$ távolsággal egyenlő.

(2 pont)

A D pontból az AB egyenesére állított merőleges egyenlete: y = -3x + 16, a talppont koordinátái: $S(\frac{47}{10}, \frac{19}{10})$. Az S pont az A és B pontok közé esik, ezért ebben az esetben a keresett távolság a $DS = \frac{17}{10}\sqrt{10}$ távolság.

(2 pont)

4. feladat

A szükségesség triviális: ha a négyszög paralelogramma, akkor $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$, így $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\circ\overrightarrow{CD} = 0$. Hasonlóan látható be, hogy a másik két tag összege is 0.

(2 pont)

Az elegendőség igazolásához mindenekelőtt kihasználjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$, stb.
A bal oldal így átrendezhető, kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{AB}\circ(-\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}\circ(-\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA}) = 0, \text{ azaz}$$

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})\circ(-\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC}) = 0 \qquad (1)$$

(2 pont)

[2] Általában 3 pont jár arra a megoldásra, amelyből kiderül, hogy szakasz ponttól vett távolságát melyik esetben hogyan lehet meghatározni.

(Vigyázat, ebből még nem következik, hogy a két tényező valamelyike 0, hiszen két vektor skaláris szorzata akkor is lehet 0, ha egyik sem nullvektor, hanem merőlegesek egymásra! A következő 4 pontból 3-at vonjunk le, ha valaki így megy tovább)

Tudjuk, hogy bármely ABCD négyszögben

$$(1) \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0 \text{, amiből}$$

$$(2) \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA}$$

A (2) egyenletnek először a bal, majd a jobb oldalát (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \circ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 0 \text{ és}$$

$$(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) \circ (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) = 0$$

Egy vektor önmagával vett skaláris szorzata csak zéróvektor esetén lehet 0, így

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \text{ és } \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA},$$

amiből következik, hogy a négyszög oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

(4 pont)

5. feladat

A bal oldalon álló kifejezés akkor értelmezett, ha $x>-1$, $x\neq 0$ és $px>0$

(1 pont)

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor az egyenlet (a logaritmus definíciója miatt) ekvivalens a következővel:

$$px = \frac{1}{x+1}$$

(1 pont)

A kezdeti feltétel miatt p és x+1 nem lehet 0, ezért az egyenlet átrendezhető:

$$x^2 + x - \frac{1}{p} = 0$$

Az egyenlet diszkriminánsa $1 + \frac{4}{p} = 0$, ami akkor nemnegatív, ha $p\leq -4$ vagy $p>0$. Ekkor a gyökök:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{p}}}{2}$$

(2 pont)

$p=-4$ esetén a másodfokú egyenletnek két egyenlő gyöke van, az eredeti egyenletnek tehát egy.

Ha $p<-4$, akkor a diszkrimináns értéke 1-nél kisebb, így a másodfokú egyenlet mindkét gyöke a $(-1,0)$ intervallumba esik. Mivel p és mindkét gyök negatív, mindkét gyök megfelelő megoldása lesz az eredeti egyenletnek, ezért p nem lehet –4-nél kisebb.
$p>0$ esetén a diszkrimináns 1-nél nagyobb, ezért a másodfokú egyenlet egyik gyöke –1-nél kisebb, a másik 0-nál nagyobb lesz. A negatív gyök nem felel meg az eredeti egyenletre kirótt

feltételeknek, a pozitív viszont igen, így ilyen esetekben az eredeti egyenletnek pontosan egy megoldása van.

Kaptuk tehát: $p>0$ vagy $p=-4$ esetén lesz az eredeti egyenletnek pontosan egy valós gyöke.

(3 pont)

6. feladat

A függvény értelmezési tartománya 0 kivételével minden valós szám.

(1 pont)

Az értékkészlet megállapításához vizsgáljuk meg, hogy milyen r valós számra lesz az

$$r = x + \frac{3}{x}$$

egyenletnek valós gyöke. Az egyenletet rendezve kapjuk:

$$x^2 - rx + 3 = 0,$$

a diszkrimináns $r^2 - 12$, ami akkor és csak akkor nemnegatív, ha $r \le -2\sqrt{3}$, vagy $r \ge 2\sqrt{3}$, így az értékkészlet $(-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}, \infty)$, amiből az is következik, hogy a függvénynek zéróhelye nincs.

(2 pont)

Szélsőértékek:
Az értékkészletből látható, hogy a függvénynek sem globális minimuma, sem globális maximuma nem lehet.
$x>0$ esetén a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával $x + \frac{3}{x} \ge 2\sqrt{3}$, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = \frac{3}{x} = \sqrt{3}$, hasonló gondolatmenettel $x<0$ esetére $x + \frac{3}{x} \le -2\sqrt{3}$, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = \frac{3}{x} = -\sqrt{3}$, a függvénynek tehát $x = -\sqrt{3}$-nál lokális maximuma, $x = \sqrt{3}$-nál pedig lokális minimuma van.

(2 pont)

Monotonitás:
Megmutatjuk, hogy a $(0, \sqrt{3}]$ intervallumon a függvény sz. monoton csökkenő. Legyen $0 < x_1 < x_2 \le \sqrt{3}$. Bizonyítandó, hogy

$$x_1 + \frac{3}{x_1} > x_2 + \frac{3}{x_2}$$

Ekvivalens átalakításokkal a bizonyítandó egyenlőtlenség $3(x_2 - x_1) > x_2 x_1 (x_2 - x_1)$ alakúra hozható, ami viszont a kezdeti feltételek alapján nyilvánvalóan teljesül.
Hasonló gondolatmenettel kapható, hogy a függvény a $(-\infty, -\sqrt{3}]$ intervallumon sz. monoton nő, a $[-\sqrt{3}, 0)$ intervallumon sz. monoton csökken, a $[\sqrt{3}, \infty)$ intervallumon pedig sz. monoton nő.

(2 pont)

A függvény grafikonját az alábbi ábra szemlélteti:

(2 pont)