

NÉMETH LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

2006. április 21.

A 9 – 10. osztályosok feladatainak javítókulcsa

1. feladat:

a)

$$\begin{aligned} &100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = \\ &= (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \dots + (2 - 1)(2 + 1) = \end{aligned}$$

(1 pont)

$$\begin{aligned} &= (100 + 99) + (98 + 97) + \dots + (2 + 1) = \\ &= (100 + 1) + (99 + 2) + (98 + 3) + \dots + (51 + 50) = 50 \cdot 101 = 5050. \end{aligned}$$

(1 pont)

b)

Jelölje k a kisebb számot. Ekkor:

$$k^2 + (k+1)^2 + k^2(k+1)^2 =$$

(1 pont)

$$k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = (k^2 + k + 1)^2$$

(1 pont)

2. feladat:

Legyen a kör átmérője d . Tekintsük a PAC derékszögű háromszöget (a Thalész-tétel miatt derékszögű a háromszög)

(1 pont)

Ebben a Pitagorasz-tétel szerint: $PA^2 + PC^2 = d^2$.

(1 pont)

Hasonlóan BPD derékszögű háromszögben $PB^2 + PD^2 = d^2$.

(1 pont)

Ezek összege $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2d^2$.

(1 pont)

3. feladat:

A tábortól a strandig x km lejtő és y km emelkedő vezet.

A menetidő odafelé:

$$\frac{x}{30} + \frac{y}{12} = \frac{18}{5}.$$

(2 pont)

A menetidő visszafelé:

$$\frac{y}{30} + \frac{x}{12} = \frac{24}{5}.$$

(2 pont)

Adjuk össze a két egyenletet:

$$\frac{x+y}{30} + \frac{x+y}{12} = \frac{42}{5}.$$

(1 pont)

Távolítsuk el a törteket:

$$2(x+y) + 5(x+y) = 12 \cdot 42$$

$$7(x+y) = 504$$

$$x+y = 72$$

Tehát a tábor és a strand távolsága 72 km.

(1 pont)

4. feladat:

Első megoldás:

A létra első fokára egyféleképpen léphetünk.

(1 pont)

A létra második fokára vagy kétszer egy fokot lépve juthatunk vagy egyszer két fokot lépve, ez $1 + 1 = 2$ lehetőség.

(1 pont)

A harmadik fokra az elsőről kettőt, a másodikról egyet lépve juthatunk. Mivel az első fokra 1, a másodikra 2 féle módon jutottunk, ezért a harmadik fokra $1 + 2 = 3$ féle módon érkezhetünk.

(1 pont)

A negyedik fokra a másodikról kettőt, a harmadikról egyet lépve juthatunk, és mivel a másodikra 2, a harmadikra 3 féle módon kerültünk, ez összesen $2 + 3 = 5$ lehetőség.

(1 pont)

Hasonló módon folytatva a számlálást: az ötödik fokra a harmadikról kettőt, a negyedikről egyet lépve juthatunk, ez összesen $3 + 5 = 8$ eset.

(1 pont)

A hatodik fokra a negyedikről kettőt, az ötödikről egyet lépve juthatunk, ez pedig összesen $5 + 8 = 13$ eset.

Végül a hetedik fokra az ötödikről kettőt, a hatodikról egy fokot lépve juthatunk, ez pedig összesen $8 + 13 = 21$ eset.

(1 pont)

Második megoldás: (Kombinatorikus eszközök használatával)

Ha 0; 1; 2; 3 számú kettős lépést (jele legyen k) választunk egy-egy lépéssorozatban és a többi lépés egyes lépés (jele e), akkor az

e, e, e, e, e, e, e;

k, e, e, e, e, e;

k, k, e, e, e;

k, k, k, e

(4 pont)

lépéssorozatokat bármely sorrendben végrehajtva célhoz jutunk. Az összes lehetséges sorrendek száma kombinációkkal számítva:

$$\binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 1 + 6 + 10 + 4 = 21.$$

(2 pont)

5. feladat:

Az egyenlet nem értelmes, ha b értéke 0 vagy -1. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy a nem lehet 0.

(1 pont)

Az egyenletből kifejezve c -t,

$$c = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right);$$

(1 pont)

A jobb oldalon mindkét tényező 0 és 2 közé esik, ezért $0 \leq c \leq 4$.

(1 pont)

- Ha $c=4$, akkor $\frac{1}{a}$ és $\frac{1}{b}$ értéke is 1, azaz $a=b=1$.

(1 pont)

- Ha $c=0$, akkor a feladatban szereplő egyenlet jobb oldalán 0 áll, ezért $a=-1$, b pedig tetszőleges szám lehet a 0 és a -1 kivételével.

(1 pont)

- Ha $c=1$, akkor az egyenletet beszorozva kapjuk, hogy $a+b=-1$.

(1 pont)

- Ha c értéke 2 vagy 3, akkor írjuk át az eredeti egyenletet a következő alakba:

$$(c-1)ab - a - b = 1$$

$$(c-1)^2 ab - (c-1)a - (c-1)b + 1 = c$$

$$((c-1)a-1)((c-1)b-1) = c.$$

- A $c=2$ esetben $(a-1)(b-1)=2$. A kettő kétféleképpen alakítható szorzattá, ezekből a (2,3); (3,2); (0,-1); (-1,0) számpárokat kapjuk; az utóbbi kettő nem megoldás.

(1 pont)

- A $c=3$ esetben $(2a-1)(2b-1)=3$. A három négyféleképpen alakítható szorzattá, ezekből a (1,2); (2,1); (0,-1); (-1,0) számpárokat kapjuk; az utóbbi kettő ismét nem megoldás.

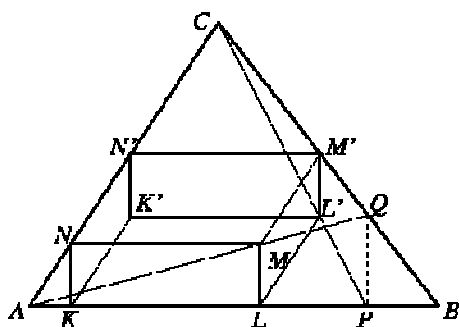
(1 pont)

Az összes megoldást táblázatba foglalva:

a	B	c
-1	tetszőleges, kivéve 0, -1	0
-1-b	tetszőleges, kivéve 0, -1	1
2	3	2
3	2	2
1	2	3
2	1	3
1	1	4

6. feladat:

Jelöljük CL' és AB metszéspontját P -vel, AM és CB metszéspontját Q -val. Az eltolás miatt a KK' , LL' , MM' és NN' szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak.



A párhuzamos szelők tételét alkalmazva az APC szögre, AC és LL' párhuzamosságából

$$\frac{PL'}{PC} = \frac{LL'}{AC} = \frac{NN'}{AC}.$$

(3 pont)

Hasonlóképpen az AQC szögre, AC és MM' párhuzamosságából $\frac{QM'}{QC} = \frac{MM'}{AC} = \frac{NN'}{AC}.$

(2 pont)

A két egyenletet összevetve $\frac{PL'}{PC} = \frac{QM'}{QC},$

(1 pont)

ebből pedig következik, hogy PQ és $M'L'$ párhuzamosak, vagyis PQ merőleges AB -re.

(2 pont)