Megoldások, pontozás

1. feladat

Legyen ABC szabályos háromszög. Rajzoljuk meg a bele- és a körülírt körét. Mivel a háromszög szabályos, ezért a körülírt körének középpontja, a beleírt körének középpontja és a súlypontja egybeesik. Legyen a háromszög súlypontja S, a BC oldal felezőpontja F. *(1 pont)* Ekkor mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalat, ezért: $AS = 2SF$. *(1 pont)* Legyen a beleírt kör sugara $r = SF$, ekkor a körülírt kör sugara $AS = 2SF = 2r$. *(1 pont)* Tehát a beleírt kör területe $r^2\pi$, a körülírt kör területe $(2r)^2\pi = 4r^2\pi$. *(1 pont)* Vagyis a beleírt kör területe 25%-a a körülírt kör területének. *(1 pont)*

Általánosítás: ha nem szabályos a háromszög, akkor (és csak akkor) a sugáregyenlőtlenség alapján a körülírt kör sugara legalább 2-szerese a beírt körének *(+1 pont)*, ezért a két kör hasonlósága miatt területük aránya is legalább 4-szeres. *(+1 pont)*

Összesen 5+2 pont.

2. feladat

Kombinatorikus megoldás: Joe 3 esetből egyszer talál, Jack-re tehát 9 esetből 3-szor nem kerül sor, viszont 6 esetből igen. Ő ebből a 6 esetből 4-szer talál. Emiatt az első két lövés során (amennyiben sor kerül két lövésre, de ebben azok az esetek is benne vannak, amikor Joe lövése talál) 9 esetből Joe 3-szor, Jack 4-szer talál. Vagyis az első „körben" Jack az esélyesebb a győzelemre. *(3 pont)* A fennmaradó két esetet ismét 2-szer 9 alesetre bontva látható, hogy a „második körben" Joe ismét 3-szor, Jack 4-szer talál, tehát ismét Jack az esélyesebb. *(2 pont)* Ez a gondolatmenet akárhanyadik körre megismételhető. *(1 pont)* Vagyis Jack az esélyesebb *(1 pont)* (és az is látszik, hogy a győzelmének esélye 4:3 *(+1 pont)*).

Valószínűségszámításos megoldás: Joe nyerési esélye az első körben 1/3 *(1 pont)*, a második körben $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ *(2 pont)*, a harmadik körben $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ *(1 pont)*, és így tovább. Ezeket a valószínűségeket összeadva a

$$\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^3 + \dots\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2/9} = \frac{3}{7}$$

valószínűséget kapjuk. *(4 pont)*

Általánosítás: Értelemszerűen (a valószínűszégszámításos megoldással könnyen gyárthatunk képletet is). *(+2 pont)*

Összesen 7+1+2 pont (a 7 pont akkor is jár, ha nem ad pontos valószínűséget).

3. feladat

Legyen az A iskolából a matek versenyen résztvevő lányok száma k, a fiúk száma v, a lányok pontszáma $l_1, l_2, ..., l_k$, a fiúk pontszáma $f_1, f_2, ..., f_v$. A B iskolából a matek versenyen résztvevő lányok száma n, a fiúk száma w, a lányok pontszáma $L_1, L_2, ..., L_n$, a fiúk pontszáma $F_1, F_2, ..., F_w$.

Ekkor a táblázat információit használva

$$\frac{l_1 + l_2 + \dots + l_k}{k} = 71,$$

$$\frac{L_1 + L_2 + \dots + L_n}{n} = 81,$$

$$\frac{f_1+f_2+\cdots+f_v}{v}=76,$$

$$\frac{F_1+F_2+\cdots+F_w}{w}=90,$$

$$\frac{l_1+l_2+\cdots+l_k+f_1+f_2+\cdots+f_v}{k+v}=74,$$

$$\frac{L_1+L_2+\cdots+L_n+F_1+F_2+\cdots+F_w}{n+w}=84,$$

$$\frac{l_1+l_2+\cdots+l_k+L_1+L_2+\cdots+L_n}{k+n}=79.$$

(3 pont)

Az 1., 2. és 7.-ből

$$\frac{71k+81n}{k+n}=79,$$

ami rendezve

$$n=4k.$$

(1 pont)

Az 1., 3. és 5.-ből

$$\frac{71k+76v}{k+v}=74,$$

ami rendezve

$$2v=3k.$$

(1 pont)

A 2., 4. és 6.-ból

$$\frac{81n+90w}{n+w}=84,$$

ami rendezve

$$2w=n,$$

amiből

$$2v=3k,$$

$$w=2k.$$

(1 pont)

Mi a következő kifejezés értékét keressük:

$$\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_v + F_1 + F_2 + \cdots + F_w}{v + w} = ?$$

A 3. és 4.-ből

$$\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_v + F_1 + F_2 + \cdots + F_w}{v + w} = \frac{76v + 90w}{v + w} = \frac{76 \cdot \frac{3}{2}k + 90 \cdot 2k}{\frac{3}{2}k + 2k} = 84.$$

Tehát a keresett átlag: 84.

(2 pont)

Összesen 8 pont.

4. feladat

Ismert a számtani és négyzetes közép közötti összefüggés:

Ha a, b valós számok, akkor

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2 + (1-b)^2}{2}} \geq \frac{a + (1-b)}{2},$$

$$\sqrt{\frac{b^2 + (1-c)^2}{2}} \geq \frac{b + (1-c)}{2},$$

$$\sqrt{\frac{c^2 + (1-a)^2}{2}} \geq \frac{c + (1-a)}{2}.$$

(2 pont)

A három egyenlőtlenséget összeadva kapjuk a következőt:

$$\sqrt{\frac{a^2 + (1-b)^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + (1-c)^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + (1-a)^2}{2}} \geq \frac{a + (1-b)}{2} + \frac{b + (1-c)}{2} + \frac{c + (1-a)}{2}.$$

(2 pont)

A jobb oldalt rendezve a következőt kapjuk:

$$\sqrt{\frac{a^2 + (1-b)^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + (1-c)^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + (1-a)^2}{2}} \geq \frac{3}{2}.$$

(1 pont)

$\sqrt{2}$-vel beszorozva az egyetlőtlenség mindkét oldalát a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$\sqrt{\frac{a^2+(1-b)^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+(1-c)^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+(1-a)^2}{2}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

(1 pont)

Nézzük meg, hogy mikor áll fenn egyenlőség!
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$a=1-b,$$

$$b=1-c,$$

$$c=1-a,$$

amit megoldva: $a=b=c=\frac{1}{2}$.

(2 pont)

Általánosítás: Nyilván analóg módon általánosítható a feladat tetszőlegesen sok számra. *(+1 pont)*

Összesen 8+1 pont.

5. feladat

Legyen a keresett tört: $\frac{a}{b}$, ahol a, b pozitív egészek.
Ekkor

$$\frac{4}{9}<\frac{a}{b}<\frac{9}{20}.$$

(1 pont)

Vegyük mindhárom oldal reciprokát:

$$\frac{20}{9}<\frac{b}{a}<\frac{9}{4}.$$

Vagyis:

$$2+\frac{2}{9}<\frac{b}{a}<2+\frac{1}{4}$$

Amiből látszik, hogy

$$2<\frac{b}{a},$$

azaz

$$2a<b.$$

(3 pont)

Legyen

$$b = 2a + c.$$

Ezt használva:

$$\frac{2}{9} < \frac{c}{a} < \frac{1}{4}.$$

(2 pont)

Átrendezve:

$$4c < a < \frac{9}{2}c$$

A legkisebb olyan c amelyre a $\left(4c, \frac{9}{2}c\right)$ intervallum tartalmaz egész számot: $c = 3$.

(2 pont)

Amiből $a = 13$, így $b = 2a + c = 29$. Mivel c-t és a-t úgy választottuk, hogy minimálisak legyenek, így b is minimális.

Tehát a $\frac{13}{29}$ a keresett tört.

(2 pont)

Összesen 10 pont (ha próbálkozással hozza ki, akkor is jár a 10 pont).

6. feladat

Tekintsük a feladatot a alapú számrendszerben. Mivel $n > 2$ páros egész, így van olyan $k \geq 2$ egész, amelyre $n = 2k$.

(1 pont)

Ekkor az a alapú számrendszerbeli $2k$ számjegyű csupa 1-esből álló szám a következő alakú:

$$a^{2k-1} + a^{2k-2} + ... + a^k + a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1 =$$

$$a^k(a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1) + a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1 =$$

$$(a^k + 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1).$$

(5 pont)

Mivel $a \geq 2$ és $k \geq 2$, ezért az első tényező legalább 5, a második tényező nagyobb, mint $a^{k-1} \geq 2$. Vagyis a csupa 1-esből álló szám nem lehet prím.

(2 pont)

Összesen 8 pont (ha csak 10-es számrendszerben számol, akkor 4 pont).